

Helligkeitsverlauf bei einer Sonnenfinsternis

Manfred Hanke (Gruppe 5: Hanke / Nieva)

24. Jan 2007

1 Zielsetzung

Der Helligkeitsverlauf bei einer Sonnenfinsternis soll numerisch berechnet werden.

2 Methoden

2.1 Randverdunkelung der Sonnenscheibe

Unter der Annahme einer grauen Sternatmosphäre folgt in Eddington-Näherung für die Mitte-Rand-Variation mit $\mu = \cos \theta$ und $r = \sqrt{x^2 + y^2} = R \sin \theta$:

$$I(x, y) = I(0) \cdot \frac{3}{5} \left(\mu + \frac{2}{3} \right) = I(0) \cdot \left(\frac{3}{5} \sqrt{1 - \frac{x^2 + y^2}{R^2}} + \frac{2}{5} \right) \quad (1)$$

Die Helligkeit der gesamten Sonnenscheibe ergibt sich durch Integration über die sichtbare Querschnittsfläche:

$$I = \iint_{\odot} dA \cdot I(x, y) \cdot \chi(x, y) \quad (2)$$

Die charakteristische Funktion $\chi(x, y)$ ist 0, wenn der Punkt (x, y) vom Mond verdeckt wird, und ansonsten 1. Mit der Mondposition $(x_{\text{Mond}}, 0)$ und dem Mondradius ρ ist somit

$$\chi(x, y) = \Theta(\sqrt{(x - x_{\text{Mond}})^2 + y^2} - \rho) \quad (3)$$

Für die unverdeckte Sonne ergibt sich die Gesamtintensität

$$I_{\text{tot}} = 2\pi \int_0^R dr \cdot r \cdot I(0) \cdot \left(\frac{3}{5} \sqrt{1 - \frac{r^2}{R^2}} + \frac{2}{5} \right) = 2\pi I(0) \left[\frac{3}{5} \left(-\frac{R^2}{2} \right) \frac{2}{3} \left(1 - \frac{r^2}{R^2} \right)^{3/2} + \frac{2}{5} \frac{r^2}{2} \right]_0^R,$$

also

$$I_{\text{tot}} = 2\pi I(0) \left[\frac{R^2}{5} + \frac{R^2}{5} \right] = \frac{4}{5} \pi R^2 \cdot I(0) \quad (4)$$

2.2 Monte-Carlo-Verfahren

Faßt man ein zweidimensionales Integral $I = \iint_{\odot} dA \cdot f(x, y)$ als Volumen zwischen dem Graphen $z = f(x, y)$ und $z = 0$ auf, kann es wieder durch Monte-Carlo-Simulation ausgemessen

werden: Liegen N_{below} von N zufällig in $[x_1, x_2] \times [y_1, y_2] \times [0, z_{\text{max}}]$ verteilten Punkten (x_r, y_r, z_r) in dem Volumen (d.h. gilt $z_r < f(x_r, y_r)$), kann das Test-Volumen – und damit auch das Integral I , falls $0 \leq f(x, y) \leq z_{\text{max}}$ gilt – zu

$$V \approx \frac{N_{\text{below}}}{N} \cdot (x_2 - x_1) \cdot (y_2 - y_1) \cdot z_{\text{max}} \quad (5)$$

abgeschätzt werden.

3 Durchführung

Die Konstanten Sonnenradius und Zentralintensität können für die numerische Berechnung des Verlaufs des Sonnenfinsternis auf $R = 1$ und $I(0) = 1$ gesetzt werden.

In der FUNCTION `I(x, y)` wird die Intensitätsverteilung auf der Sonnenscheibe berechnet. Drei Fälle sind zu unterscheiden: 1. (x, y) liegt innerhalb der Sonnenscheibe ($r \leq 1$) und ist a) nicht vom Mond verdeckt (Gl. 3), dann ist I durch Gleichung 1 gegeben; b) (x, y) ist verdeckt, dann ist $I = 0$; oder 2. (x, y) liegt gar nicht auf der Sonnenoberfläche, dann ist ebenfalls $I = 0$. Die Daten des Mondes (x -Position `xMoon` und das Quadrat des Radius `rho2`) werden in einem COMMON-Block übergeben.

Die FUNCTION `totInt(b, rho, t)` berechnet die Gesamtintensität durch Monte-Carlo-Integration. `b` ist der “Stoßparameter” der Mondmittelpunktsbewegung zum Sonnenmittelpunkt. `rho` der Radius des Mondes relativ zum scheinbaren Sonnenradius $R = 1$, und `t` ist die Koordinate der Mondbewegung, die also die Zeit parametrisiert. Der in der FUNCTION `I(x, y)` verwendete Abstand `xMoon` berechnet sich zu $\sqrt{b^2 + t^2}$. Dazu werden in einer Schleife (über `j`) $N = 250\,000$ zufällige Punkte (x_r, y_r, z_r) aus dem Volumen $[-1, 1] \times [-1, 1] \times [0, 1]$ generiert. (Der Integrand $I(x, y) \cdot \chi(x, y)$ liegt zwischen 0 und $I(0) = 1$.) In der Variablen `Nbelow` wird gezählt, wie oft $z_r < I(x_r, y_r)$ ist. Der Rückgabewert ist das durch die unverdeckte Intensität $\frac{4}{5}\pi$ (Gl. 4) dividierte Integral 2, um die relative Intensität zum Maximalwert zu erhalten.

Im Hauptprogramm werden drei verschiedene Wertetabellen der Gesamtintensität erstellt (da der ‘first/last contact’ bei $|t| = \sqrt{(1 + \rho)^2 - b^2}$ stattfindet, werden Werte von $t = -2,5$ bis $t = 2,5$ in 0,01er-Schritten berechnet) und in jeweils eine Datei geschrieben. Für die totale Sonnenfinsternis wird $b = 0$ und $\rho = 1$ angenommen, für die ringförmige $b = 0$ und $\rho = 0.99$ und schließlich für eine partielle Sonnenfinsternis $b = 0.03$ und $\rho = 1$.

4 Fortran-Programm

```

REAL FUNCTION I(x, y)
REAL x, y, xMoon, rho2, r2
COMMON xMoon, rho2
r2 = x*x + y*y
IF(r2 .LE. 1.0) THEN
c   Is (x,y) obscured by the Moon?
   IF((x-xMoon)*(x-xMoon) + y*y .LE. rho2) I = 0
ELSE
c   (x,y) is not at the solar surface at all.
   I = 0
END IF
END

c
c
c   INCLUDE "ran2.for"

REAL FUNCTION totInt(b, rho, t)
REAL b, rho, t, xr, yr, zr, I
REAL xMoon, rho2
INTEGER idum, N, Nbelow, j
COMMON xMoon, rho2, idum
xMoon = SQRT(b*b+t*t)
rho2 = rho*rho
N = 250000
Nbelow = 0
j = 1
100  xr = 2*ran2(idum)-1.0
     yr = 2*ran2(idum)-1.0
     zr = ran2(idum)
     IF(zr .LE. I(xr,yr)) Nbelow = Nbelow + 1
     j = j+1
     IF(j .LT. N) GOTO 100
     totInt = (4.0*Nbelow)/N / (0.8*3.14159265)
END

c
c
PROGRAM SolEcl
INTEGER idum
REAL b, rho, t, tI
COMMON idum
idum = -1

```

```

OPEN(UNIT=1, FILE='3b_totEcl.dat')
b = 0.0
rho = 1.0
t = -2.5
100  tI = totInt(b, rho, t)
     IF(tI .GT. 0.0) THEN
WRITE(*,*) t
WRITE(1,*) t, tI
ENDIF
t = t + 0.01
IF(t .LE. 2.5) GOTO 100
CLOSE(UNIT=1)

c

OPEN(UNIT=1, FILE='3b_ringEcl.dat')
b = 0.0
rho = 0.99
t = -2.5
200  tI = totInt(b, rho, t)
     WRITE(*,*) t
     WRITE(1,*) t, tI
t = t + 0.01
IF(t .LE. 2.5) GOTO 200
CLOSE(UNIT=1)

c

OPEN(UNIT=1, FILE='3b_partEcl.dat')
b = 0.01
rho = 1.0
t = -2.5
300  tI = totInt(b, rho, t)
     WRITE(*,*) t
     WRITE(1,*) t, tI
t = t + 0.01
IF(t .LE. 2.5) GOTO 300
CLOSE(UNIT=1)

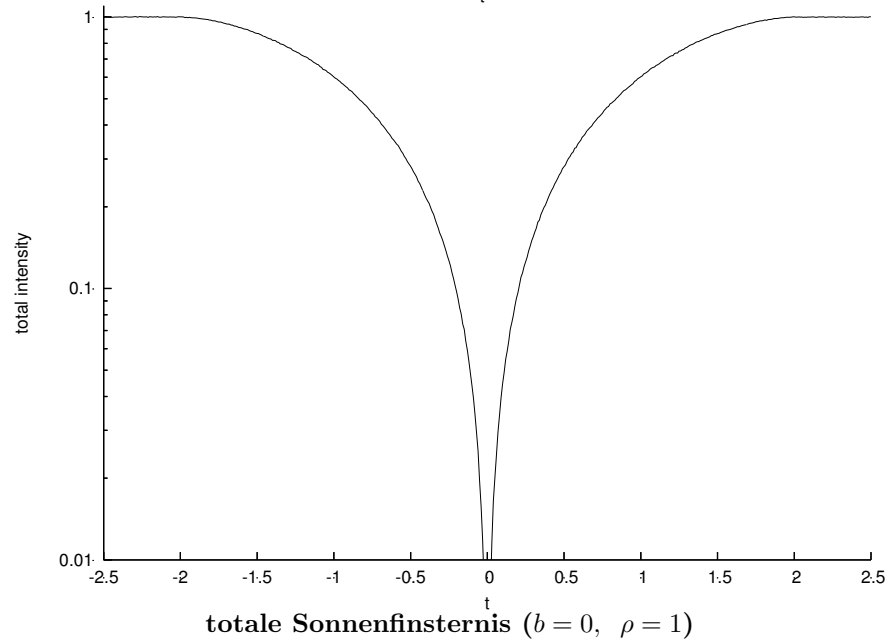
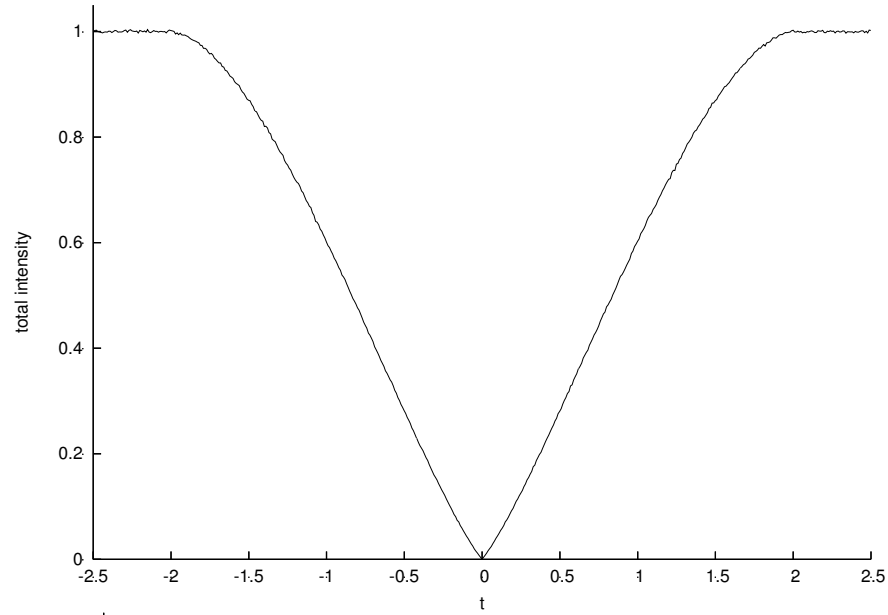
c

END

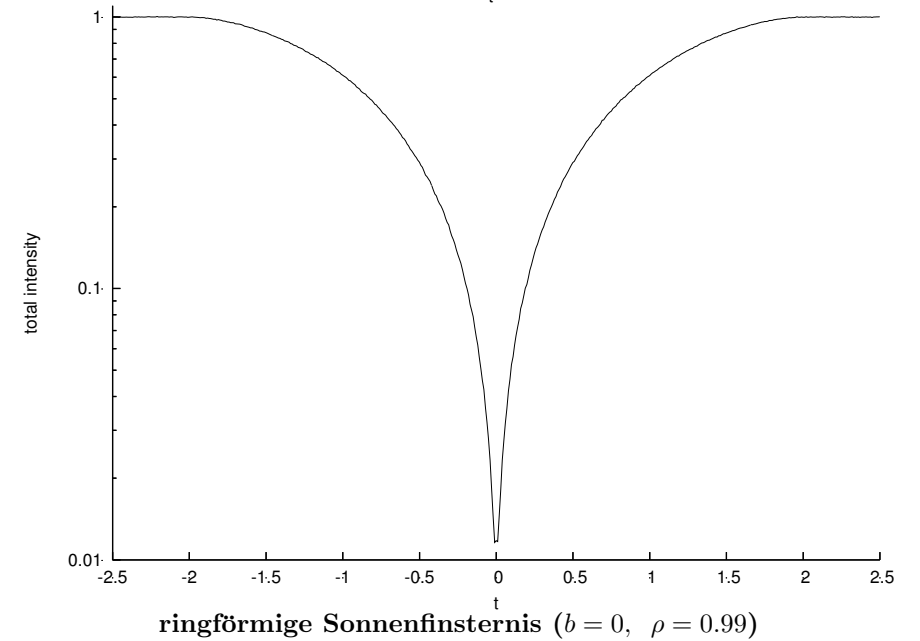
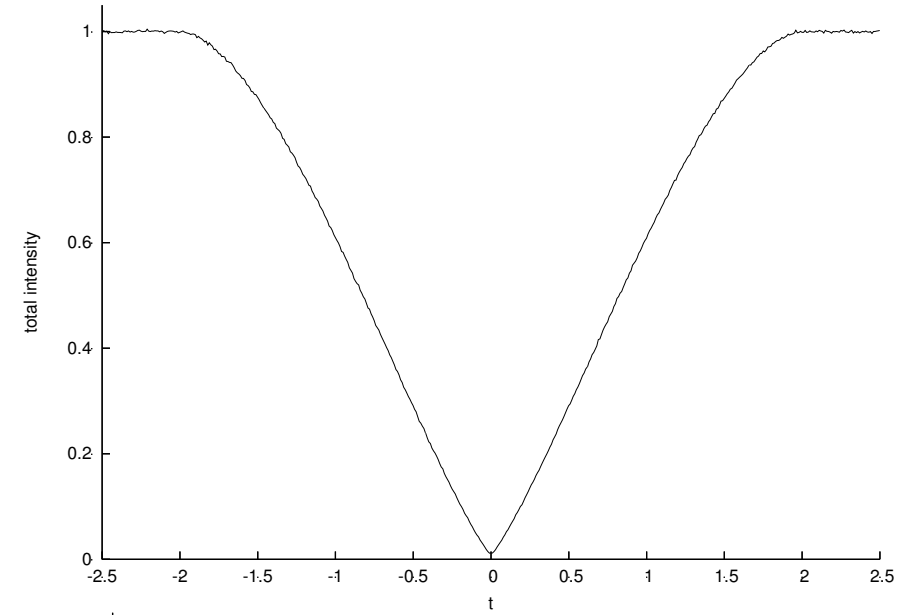
```

5 Ergebnisse und Auswertung

Für die totale Sonnenfinsternis ergibt sich natürlich ein Absinken der Intensität bis auf 0 bei der vollständigen Verdeckung ($t = 0$):



Bei der ringförmigen Sonnenfinsternis mit $\rho = 0.99$ und $b = 0$ beträgt die Intensität bei $t = 0$ nur noch 0.011:



Die partiellen Sonnenfinsternis mit $\rho = 1$ und $b = 0.03$ führt schließlich zur gleichen Minimalintensität von 0.011 wie die ringförmigen Sonnenfinsternis mit $\rho = 0.99$ und $b = 0$; auch der Verlauf ist sehr ähnlich.

Anhang: Einige weitere Plots...

Im folgenden wird der Verlauf der Funktion $I(x, y) \cdot \chi(x, y)$ für eine ringförmige Sonnenfinsternis mit (dem der Deutlichkeit halber übertriebenen Wert) $\rho = 0.9$ gezeigt:

