Mathematisches Werkzeug für Theoretische Physik

Thomas Glomann thomas@glomann.de

1. November 2004

basierend auf der Vorlesung von Prof. Wettig
Skript bitte auf Fehler überprüfen und diese umgehend an mich mailen!

Inhaltsverzeichnis

1 Dirac'sche Deltafunktion

1.1 Definition

- definiert durch $\delta(x) = 0 \qquad f\ddot{u}rx \neq 0$

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)dx = 1$$

- kann als Grenzwert einer Folge von Funktionenen definiert werden:

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \delta_n(x)f(x)dx = f(0) \qquad \text{mit} \qquad \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \delta_n(x)dx = 1$$

- Der Grenzwert $\lim_{n\to\infty} \delta_n(x)$ existiert nicht.

1.2 Eigenschaften

-

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} dxf(x)\delta(x-a) = fa$$

- Ableitung:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} dxf(x)\delta'(x-a) = -\int dxf'(x)\delta(x-a) = -f'(a)$$

- wenn g(x) nur einfache Nullstellen x_i hat:

$$\delta(g(x)) = \sum_{\substack{i \\ g'(x_i)\neq 0}} \frac{\delta(x-x_i)}{|g'(x_i)|}$$

- Integral:

$$\int\limits_{-\infty}^{x} dx'\delta(x') = \Theta(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x > 0 \\ 0 & \text{für } x < 0 \end{cases}$$

- in 3d kartesischen Koord: $\delta(\vec{x}) = \delta(x_1)\delta(x_2)\delta(x_3)$

$$\Rightarrow \quad \int_{\Delta V} d^3x'\delta(\vec{x}-\vec{x}') = \begin{cases} 1 & \text{wenn } \Delta V \text{ den Punkt } \vec{x} \text{ enthält} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

- in krummlinigen Koordinaten: $\{\xi_1, \xi_2, \xi_3\} : d^3x = J(x_i, \xi_i)d^3$

$$\Rightarrow \delta(\vec{x}) = \frac{1}{|J(x_i, \xi_i)|}\delta(\xi_1)\delta(\xi_2)\delta(\xi_3)$$

- Dimension der δ-Funktion: inverses Volumen
- Für eine Anordnung von Punktladungen ist die Ladungsdichte:

$$\rho(\vec{x}) = \sum_i q_i\delta(\vec{x}-\vec{x}_i)$$

2 Vektorfelder und Differentialoperatoren

2.1 Skalarfeld

- jedem Punkt des Raums $\mathbb{R}^n$ wird ein Skalar (Zahl) φ zugeorgnet
- invariant unter koordinaten Transformation $\vec{x} \to \vec{x}' : \varphi(\vec{x}') = \varphi\vec{x}$
- Bsp.: Temperatur, Dichte, Luftdruck

2.2 Vektorfeld

- Objekt mit n Komponenten (in n Dimensionen)
- glatte Funktion von $\mathbb{R}^n$ nach $\mathbb{R}^n$ (unendlich oft stetig diffbar)
- Tensor 1. Stufe oder ersten Ranges
- definiert über das Verhalten unter koord. Trafos.
- 2 Fälle:

2.2.1 kontravarianter Vektor (hochgestellte Indices)

transformiert sich unter koordinaten Transformation wie $d\vec{x}$:

$$dx'^i = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial x'^i}{\partial x^j} dx^j \equiv \frac{\partial x'^i}{\partial x^j} dx^j \qquad \text{(Summe über doppelte Indizes)}$$

Kontravarianter Vektor $\vec{A}$ transformiert sich wie

$$A'^i = \frac{\partial x'^i}{\partial x^j} A^j \qquad \text{(Indizes oben)}$$

2.2.2 kovarianter Vektor (tiefgestellte Indices)

transformiert sich wie $\vec{\nabla}\varphi$ (φ = Skalarfeld)

$$\frac{\partial \varphi'}{\partial x'^i} = \frac{\partial \varphi}{\partial x'^i} = \frac{\partial \varphi}{\partial x^j} \frac{\partial x^j}{\partial x'^i}$$

kovarianter Vektor $\vec{A}$ transformiert sich wie

$$A'_i = \frac{\partial x^j}{\partial x'^i} A_j \qquad \text{Indices unten}$$

in kartesischen Koordinaten: Transformation ist Rotation (+ evtl. Spiegelung)

$$\vec{x}' = R\vec{x} \text{ mit R orthogonal } (RR^T = 1 \text{ bzw } R^{-1} = R^T)$$

$$x'^i = R^i_j x^j \qquad x^j = (R^{-1})^j_i x'^i = (R^T)^j_i x'^i = R^i_j x'^i$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{\partial x'^i}{\partial x^j} = R^i_j = \frac{\partial x^j}{\partial x'^i}$$

$\Rightarrow$ kein Unterschied zw. kontra- und kovariant

2.3 Nabla

$$\boxed{\vec{\nabla} = \hat{x}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{y}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{z}\frac{\partial}{\partial z}}$$

kann auf Skalar- bzw. Vektorfelder angewandt werden Gradient: Nabla angewandt auf Skalare Fktn $\varphi(x, y, z)$ ergibt Vektor

$$\boxed{\vec{\nabla}\varphi = \hat{x}\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \hat{y}\frac{\partial \varphi}{\partial y} + \hat{z}\frac{\partial \varphi}{\partial z}} \qquad \text{Gradient von } \varphi$$

- wenn sich Position um $d\vec{r}$ ändert, ändert sich φ um

$$d\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy + \frac{\partial \varphi}{\partial z} dz = (\vec{\nabla}\varphi) \cdot d\vec{r}$$

- auf einer Fläche mit $\varphi(x,y,z) = \text{const}$: $d\varphi = 0 \qquad \rightarrow \qquad \vec{\nabla}\varphi \perp d\vec{r}$
- für festes $|d\vec{r}|$ wird $d\varphi = (\vec{\nabla}\varphi) \cdot d\vec{r}$ maximal, wenn $\vec{\nabla}\varphi \parallel d\vec{r}$
  $\rightarrow$ Richtung von $\vec{\nabla}\varphi \triangleq$ größte Änderungsrate von φ
- Bsp:

$$\varphi(x,y,z) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \frac{1}{r}$$

$$\vec{\nabla}\varphi = -\frac{1}{r^2}\left(\frac{x}{r}\hat{x} + \frac{y}{r}\hat{y} + \frac{z}{r}\hat{z}\right) = -\frac{\vec{r}}{r^3} = -\frac{\hat{r}}{r^2}$$

- physikalische Bedeutung: konservative Kraft $= -\vec{\nabla}$ (Potential) , (konservativ bedeutet $\vec{\nabla} \times \vec{F} = 0$

2.4 Divergenz

- Skalarprodukt von $\vec{\nabla}$ mit einem Vektor ergibt einen Skalar

$$\boxed{\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}} \qquad \text{Divergenz von } \vec{v}$$

- Produktregel: $\vec{\nabla} \cdot (f\vec{v}) = (\vec{\nabla}f) \cdot v + f\vec{\nabla} \cdot \vec{v}$
- Beispiel: Kontinuitätsgleichung:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho\vec{v}) = 0$$

  Fluss aus Volumen $\rightarrow$ geringere Dichte und umgekehrt.

2.5 Rotation

- Kreuzprodukt von $\vec{\nabla}$ mit einem Vektor ergibt einen Vektor:

$$\boxed{\vec{\nabla} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \partial x & \partial y & \partial z \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} \partial y v_z - \partial z v_y \\ \partial z v_x - \partial x v_z \\ \partial x v_y - \partial y v_x \end{pmatrix}} \qquad \text{Rotation von } \vec{v}$$

- Determinante muss von oben nach unten entwickelt werden
- Produktregel: $\vec{\nabla} \times (f\vec{v}) = (\vec{\nabla}f) \times v + f\vec{\nabla} \times \vec{v}$
- Bsp.: rotierende Flüsse: ...
- Rechte-Hand-Regel: Daumen in Richtung von $\vec{\nabla} \times \vec{v}$, Finger der gekrümmten Hand in Drehrichtung.

2.6 LaPlace-Operator - Divergenz des Gradienten

$$\boxed{\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}\varphi \equiv \vec{\nabla}^2\varphi \equiv \Delta\varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}}$$

Wiederholte Anwendung von $\vec{\nabla}$

- $\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{A} = 0$ (für alle $\vec{A}$)
  $\rightarrow$ falls $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$ ($\vec{B}$ ist **Quellenfrei**), kann $\vec{B}$ als $\vec{\nabla} \times \vec{A}$ geschrieben werden
- $\vec{\nabla} \times \vec{\nabla}\varphi = 0$ (für alle φ)
  $\rightarrow$ falls $\vec{\nabla} \times \vec{F} = 0$ ($\vec{F}$ ist **rotationsfrei**, **wirbelfrei**,**konservativ**) kann $\vec{F}$ als $\vec{\nabla}\varphi$ geschrieben werden
- Gravitations- und el. stat. (aber **nicht** magn.) Kräfte sind rotationsfrei

3 Linien-, Flächen- und Volumeninegrale

3.1 Linienintegrale

Längenelement: $d\vec{r} = \hat{x}dx + \hat{y}dy + \hat{z}dz$ 3 Möglichkeiten: $\int_C \varphi d\vec{r}$, $\int_C \vec{v} \cdot d\vec{r}$, $\int_C \vec{v} \times d\vec{r}$

- C ist eine Kontur (offen oder geschlossen)
- C muß angegeben werden (i.A. hängt ergebnis von C ab)
- Entwicklung in $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z} \to$ einfache Integrale
- Beispiel: Kraft $\vec{F} = -y\hat{x} + x\hat{y}$
  Arbeit $W = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = -\int\limits_0^1 ydx + \int\limits_0^1 xdy$

3.2 Flächenintegrale

Flächenelement: $d\vec{\sigma} = \hat{n}dA$ 3 Möglichkeiten: $\int_S \varphi d\vec{\sigma}$, $\int_S \vec{v} \cdot d\vec{\sigma}$, $\int_S \vec{v} \times d\vec{\sigma}$

- S ist eine Fläche (offen oder geschlossen)
- S offen: rechte-Hand-Regel (Daumen entspricht$\hat{n}$, gekrümmte Finger in Richtung des Umfangs)
- S geschlossen: $\hat{n} \perp$ Fläche, nach außen
- Enwicklung in Komponenten $\to$ Doppelintegrale
- $\int_S \vec{v} \cdot d\vec{\sigma} =$ Fluss durch die Fläche S

3.3 Volumenintegrale

Volumenelement: $d\tau = dxdydz$ ist eine Skalar

$$\int_V \vec{v} d\tau = \hat{x} \int_V v_x d\tau + \hat{y} \int_V v_y d\tau + \hat{z} \int_V v_z d\tau$$

4 Integralsätze

4.1 Gaußscher Integralsatz

$$\boxed{\oint_S \vec{v} \cdot d\vec{\sigma} = \int_V dt \vec{\nabla} \cdot \vec{v}}$$ S = geschlossen Oberfläche des Volumens

andere Formen: $\oint_S \varphi d\vec{\sigma} = \int_V d\tau \vec{\nabla} \varphi$ $\oint_S d\vec{\sigma} \times \vec{p} = \int_V d\tau \vec{\nabla} \times \vec{p}$

4.2 Stokes'scher Integralsatz

$$\boxed{\oint_C \vec{v} \cdot d\vec{r} = \int_S \vec{\nabla} \times \vec{v} d\vec{\sigma}}$$ C = geschlossene Umfang der Fläche S

Vorzeichen durch rechte Hand Regel festgelegt.
ander Formen: $\oint_C \varphi d\vec{r} = \int_S d\vec{\sigma} \times \vec{\nabla}\varphi$ $(\vec{v} = \varphi \hat{a})$ $\oint_C d\vec{r} \times \vec{p} = \int_S (d\sigma \times \vec{\nabla}) \times \vec{p}$ $(\vec{v} = \hat{a} \times \vec{p})$

4.3 Greensche Identitäten

4.3.1 für zwei skalara Funktionen u und v gilt:

$$\vec{\nabla} \cdot (u\vec{\nabla} v) = u\vec{\nabla}^2 v + (\vec{\nabla} u) \cdot (\vec{\nabla} v)$$
$$\vec{\nabla} \cdot (v\vec{\nabla} u) = v\vec{\nabla}^2 u + (\vec{\nabla} v) \cdot (\vec{\nabla} u)$$

4.3.2 1. Greensche Identität:

$$\int_V d\tau[u\vec{\nabla}^2 v + (\vec{\nabla}u)\cdot(\vec{\nabla}v)] \overbrace{=}^{\text{Gauß Satz mit } \vec{v}=u\vec{\nabla}v} \oint_S u\vec{\nabla}v \cdot d\vec{\sigma} = \oint_S u\frac{\partial v}{\partial n}dA$$

4.3.3 2. Greensche Identität (oder Greenscher Satz):

subtrahiere die beiden Gleichungen, integriere über V

$$\int_V d\tau\left[u\vec{\nabla}^2 v - v\vec{\nabla}^2 u\right] \overbrace{=}^{\text{Gauß Satz}} \oint_S \left[u\vec{\nabla}v - v\vec{\nabla}u\right] d\vec{\sigma} = \oint_S \left[u\frac{\partial v}{\partial n} - v\frac{\partial u}{\partial n}\right] dA$$

5 Krummlinige (but orth.) Koordinatensysteme

- allgemein: Schnittpunkt dreier Flächen:
  q_i = const (i=1,2,3) $\rightarrow \vec{r} = (x, y, z) = (q_1, q_2, q_3)$
- quadratisches Längenelement: im kartesischen KS: $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$
  im krummlinigen KS: $ds^2 = \sum_{ij} g^{ij} dq_i dq_j$

$$dx = \sum_i \frac{\partial x}{\partial q_i} dq_i \quad \text{etc.}: \qquad g^{ij} = \sum_l \frac{\partial x_l}{\partial q_i}\frac{\partial x_l}{\partial q_j} \qquad \text{Metrik oder metrischer Tensor}$$

- Beschränkung auf orthogonale KS: $\hat{e}_i \cdot \hat{e}_j = \delta_{ij}$
  $\xrightarrow{rechnung} \quad g_{ij} = h_i^2 \delta_{ij} \qquad (h_i^2 = \text{Skalenfaktoren})$
- Längenelemente: $ds_i = h_i dq_i \qquad \rightarrow \qquad ds^2 = \sum_i hi^2 dq_i^2$
- differentieller Abstandsvektor: $d\vec{r} = \sum_i h_i dq_i \hat{e}_i \quad \rightarrow \quad \hat{e}_i = \frac{1}{h_i}\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} = \frac{1}{h_i}\sum_j \hat{x}_j \frac{\partial x_j}{\partial q_i}$
- Flächenelement: $d\sigma_{ij} = h_i h_j dq_i dq_j \qquad d\sigma = d\sigma_{23}\hat{e}_1 + d\sigma_{31}\hat{e}_2 + d\sigma_{12}\hat{e}_3$
- Volumenelement: $d\tau = h_1 h_2 h_3\, dq_1 dq_2 dq_3$
- Vektoralgebra (Skalar- und Kreuzprodukt) unverändert
- Linien-, Flächen- und Volumenintegrale: benötige obige Ausdrücke für $d\vec{r}, d\vec{\sigma}, d\tau$
- **Gradient**: Gradient eines Skalarfeldes ψ ist ein Vektor mit Betrag und Richtung der größten Änderungsrate von ψ:

$$\boxed{\vec{\nabla}\psi(q_1, q_2, q_3) = \hat{e}_1\frac{\partial \psi}{\partial s_1} + \hat{e}_2\frac{\partial \psi}{\partial s_2} + \hat{e}_3\frac{\partial \psi}{\partial s_3} = \sum_i \hat{e}_i \overset{\perp}{h_i} \frac{\partial \psi}{\partial q_i}}$$

- **Divergenz**: Gaußscher Satz füer infinitesimales Volumenelement

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{v} = \lim_{d\tau\rightarrow 0}\frac{\oint_S \vec{v}\cdot d\vec{\sigma}}{d\tau} \quad \text{nun } v_i = \vec{v}\cdot\hat{e}_i$$

$$\boxed{\vec{\nabla}\cdot\vec{v}(q_1, q_2, q_3) = \frac{1}{h_1 h_2 h_3}\left[\frac{\partial}{\partial q_1}(v_1 h_2 h_3) + \frac{\partial}{\partial q_2}(v_2 h_3 h_1) + \frac{\partial}{\partial q_3}(v_3 h_1 h_2)\right]}$$

- **Rotation**: Sokes'scher Satz für infinitesimale Fläche

$$\hat{n}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{v}) = \lim_{dA\rightarrow 0}\frac{\oint_C \vec{v}\cdot d\vec{r}}{dA} \quad \text{nun } \hat{n} = \hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3$$

$$\boxed{\vec{\nabla}\times\vec{v}(q_1, q_2, q_3) = \frac{1}{h_1 h_2 h_3}\begin{vmatrix} \hat{e}_1 & \hat{e}_2 & \hat{e}_3 \\ \partial q_1 & \partial q_2 & \partial q_3 \\ h_1 v_1 & h_2 v_2 & h_3 v_3 \end{vmatrix}}$$

- **LaPlace Operator**:

$$\vec{\nabla}^2\psi = \vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}\psi = \vec{\nabla}\cdot\sum_i \hat{e}_i \frac{1}{h_i}\frac{\partial \psi}{\partial q_i} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3}\left[\frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{h_2 h_3}{h_1}\frac{\partial \psi}{\partial q_1}\right) + \frac{\partial}{\partial q_2}\left(\frac{h_1 h_3}{h_2}\frac{\partial \psi}{\partial q_2}\right) + \frac{\partial}{\partial q_3}\left(\frac{h_1 h_2}{h_3}\frac{\partial \psi}{\partial q_3}\right)\right]$$

6 wichtige Identität

$$\boxed{\vec{\nabla}^2 \frac{1}{r} = -4\pi\delta(\vec{r})}$$

7 Zerlegungs- und Eindeutigkeitssatz

Betrachte ein Vektorfeld $\vec{v}(\vec{x})$

$$\vec{v}(\vec{x}) = \int_V d\tau' \delta(\vec{x} - \vec{x}')\vec{v}(\vec{x}') = -\frac{1}{4\pi}\vec{\nabla}^2 \int_V d\tau' \frac{\vec{v}(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|}$$

$$\text{Identität:} \quad \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{a}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{a}) - \vec{\nabla}^2 \vec{a} \qquad (\vec{a} \text{ ist das Integral})$$

$$\vec{v}(\vec{x}) = -\frac{1}{4\pi}\vec{\nabla}\left[\vec{\nabla} \cdot \int_V d\tau' \frac{\vec{v}(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|}\right] + \frac{1}{4\pi}\vec{\nabla} \times \left[\vec{\nabla} \times \int_V d\tau' \frac{\vec{v}(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|}\right]$$

d.h. $\vec{v}(\vec{x})$ kann zerlegt werden in Gradienten eines Skalarfeldes und Rotation eines Vektorfeldes:

$$\boxed{\vec{v}(\vec{x}) = -\vec{\nabla} g(\vec{x}) + \vec{\nabla} \times \vec{w}(\vec{x})} \qquad \text{Zerlegungssatz}$$

7.1 Umformungen

$$g(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi}\vec{\nabla} \cdot \int_V d\tau' \frac{\vec{v}(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} = \frac{1}{4\pi}\int_V d\tau' \frac{\vec{\nabla}' \cdot \vec{v}(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} - \frac{1}{4\pi}\oint_S d\vec{\sigma}' \frac{\vec{v}(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \qquad \left[\vec{\nabla}\frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} = -\vec{\nabla}'\frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|}\right]$$

$$\vec{w}(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi}\vec{\nabla} \times \int_V d\tau' \frac{\vec{v}(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} = \frac{1}{4\pi}\int_V d\tau' \frac{\vec{\nabla}' \times \vec{v}(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} - \frac{1}{4\pi}\oint_S d\vec{\sigma}' \times \frac{\vec{v}(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|}$$

7.2 Folgerung

d.h. $\vec{v}(\vec{x})$ ist eindeutig bestimmt durch

1. seine Quellen ($\vec{\nabla} \cdot \vec{v}$) und Wirbel ($\vec{\nabla} \times \vec{v}$) im Innern von V
2. $\vec{v}$ auf der Oberfläche S von V.

Mit $V = \mathbb{R}^3$ und $|\vec{v}(\vec{x})| \leq \frac{c}{|\vec{x}|^{1+\epsilon}}$ für $|\vec{x}| \to \infty$ mit $c, \epsilon > 0$ verschwinden die Oberflächenterme und g und $\vec{w}$ vereinfachen sich

- falls $\vec{\nabla} \times \vec{v} = 0 \qquad \to \qquad \vec{v} = -\vec{\nabla} g$
- falls $\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0 \qquad \to \qquad \vec{v} = \vec{\nabla} \times \vec{w}$

(mit $\vec{\nabla} \cdot \vec{w} = 0$ da $\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{a}) = 0$)