

Übungen zur Theoretischen Physik II (Elektrodynamik)

Blatt 1

Aufgabe 1: Delta-Funktion

Die Diracsche Delta-Funktion in drei Dimensionen, $\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$, kann durch eine Folge von Gauß-Funktionen realisiert werden,

$$D(n; x, y, z) = n^3 e^{-\pi n^2 (x^2 + y^2 + z^2)} \quad (n \rightarrow \infty).$$

Man betrachte ein allgemeines orthogonales Koordinatensystem, das durch die Flächen $u = \text{const}$, $v = \text{const}$ und $w = \text{const}$ und durch die zueinander orthogonalen Linienelemente du/U , dv/V und dw/W gekennzeichnet ist.

Mit Hilfe des Grenzprozesses $n \rightarrow \infty$ an obiger Gauß-Funktion zeige man, daß

$$\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \delta(u - u') \delta(v - v') \delta(w - w') \cdot UVW.$$

(Beachten Sie, daß für $n \rightarrow \infty$ im Exponenten nur infinitesimal kleine Werte von $|x|$, $|y|$ und $|z|$ eine Rolle spielen!)

Aufgabe 2: Ladungsdichten

Schreiben Sie die folgenden Ladungsverteilungen mit Hilfe der Delta-Funktion [sowie ggf. der Funktion $\Theta(x)$ mit den Werten 1 (für $x \geq 0$) bzw. 0 (für $x < 0$)] in den angegebenen Koordinaten als räumliche Ladungsdichten $\rho(\mathbf{r})$!

- (a) Eine gleichmäßig über eine Kugeloberfläche vom Radius R verteilte Ladung Q in Kugelkoordinaten (r, θ, ϕ) .
- (b) Eine gleichmäßig über die Oberfläche eines Zylinders vom Radius b verteilte Ladung λ (pro Längeneinheit) in Zylinderkoordinaten (s, z, ϕ) .
- (c) Eine gleichmäßig über eine flache, infinitesimal dünne Kreisscheibe vom Radius R verteilte Ladung Q in Zylinderkoordinaten.
- (d) Das gleiche wie in (c), aber in Kugelkoordinaten.

Aufgabe 3: Divergenz in krummlinigen Koordinaten

Zeigen Sie, daß die Divergenz $\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r})$ eines Vektorfeldes $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ in beliebigen (im allg. krummlinigen) orthogonalen Koordinaten $\{q_1, q_2, q_3\}$ gegeben ist durch

$$\nabla \cdot \mathbf{E}(q_1, q_2, q_3) = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial q_1} (E_1 h_2 h_3) + \frac{\partial}{\partial q_2} (E_2 h_1 h_3) + \frac{\partial}{\partial q_3} (E_3 h_1 h_2) \right].$$

(Notation wie in der Vorlesung!)

Hinweis: Gehen Sie aus von der Definition

$$\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) \equiv \lim_{\Omega \rightarrow 0} \left[\frac{1}{\Omega} \oint_{\partial\Omega} \mathbf{E} \cdot d\vec{\sigma} \right],$$

wobei Ω das Volumen eines den Punkt $\mathbf{r}$ enthaltenden Bereiches und $\partial\Omega$ dessen Oberfläche (“Rand”) bezeichnen.

Aufgabe 4: Fluß durch eine Fläche

Das Vektorfeld $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ sei in kartesischen Koordinaten gegeben durch

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \gamma z \end{pmatrix}, \quad \gamma > 0.$$

- (a) Wie groß ist sein Fluß $\int_F d\vec{\sigma} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r})$ durch eine ebene Fläche F mit Inhalt A , welche bei $z = c$ parallel zur x, y -Ebene liegt?
- (b) Wie hängt der Fluß von $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ aus der Oberfläche $\partial\Omega$ eines Quaders Ω (mit Kanten parallel zu den Koo.-achsen) von dessen Position und Abmessungen (Kantenlängen a, b, c) ab?
- (c) Berechnen Sie den Fluß von $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ aus der Oberfläche ∂K einer Kugel K mit Radius R um den Ursprung! Welcher Anteil dieses Flusses geht durch den Teil von ∂K mit $z > z_0$ (wobei $|z_0| \leq R$)?

Übungen zur Theoretischen Physik II (Elektrodynamik)

Blatt 2

Aufgabe 1: Elektrische Felder von Kugeln

Bestimmen Sie mit Hilfe des Gaußschen Gesetzes das elektrische Feld innerhalb und außerhalb einer Kugel mit Radius R und Gesamtladung Q für folgende Fälle:

- (a) Die Kugel ist leitend.
- (b) Die Ladung Q ist homogen über das Kugelvolumen verteilt.
- (c) Die Ladungsdichte $\rho(\mathbf{r})$ innerhalb der Kugel ist kugelsymmetrisch und variiert in radialer Richtung wie r^n (mit $n > -3$).

Skizzieren Sie die Radialabhängigkeit dieser Felder in den Fällen (a) und (b), sowie im Fall (c) für $n = 2$ und $n = -2$.

Aufgabe 2: Ladungsverteilung im Wasserstoffatom

Das Potential eines neutralen Wasserstoffatoms ist im zeitlichen Mittel gegeben durch

$$\Phi(\mathbf{r}) = q \left(1 + \frac{\alpha r}{2} \right) \frac{e^{-\alpha r}}{r},$$

wobei q der Betrag der Elektronenladung und $\frac{2}{\alpha} = a_B = 0.529 \text{ \AA}$ der Bohrsche Radius ist. Man bestimme die (kontinuierliche wie auch diskrete) Ladungsverteilung, die dieses Potential erzeugt, und interpretiere das Ergebnis physikalisch.

Aufgabe 3: Ein Mittelwertsatz

Zeigen Sie: *Im ladungsfreien Raum ist der Wert des elektrostatischen Potentials an jedem Punkt gleich dem Mittelwert des Potentials auf der Oberfläche einer beliebigen Kugel um diesen Punkt.*

Bitte wenden!

Aufgabe 4:

Welches ist die Ladungsdichte, durch die folgendes elektrische Feld erzeugt wird?
(vgl. Aufgabe 4 von Blatt 1!)

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ E_z(\mathbf{r}) \end{pmatrix}, \quad E_z(\mathbf{r}) = \begin{cases} -\gamma c & : z < -c, \\ \gamma z & : |z| \leq c, \\ +\gamma c & : z > c, \end{cases} \quad (\gamma, c > 0).$$

Lösen Sie für dieses Feld nochmals die Teilaufgaben (4b) und (4c) von Blatt 1, und zwar nur für die *geschlossenen* Oberflächen, nun aber ohne Integration!

Übungen zur Theoretischen Physik II (Elektrodynamik)

Blatt 3

Aufgabe 1: Homogen geladene Scheibe in 3D

Betrachten Sie eine unendlich dünne, ebene und homogen geladene Kreisscheibe mit Radius R und Gesamtladung Q in der x, y -Ebene (Zentrum im Ursprung).

- (a) Berechnen Sie das elektrostatische Potential der Scheibe,

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3\mathbf{r}' \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|},$$

an einem beliebigen Punkt auf der Scheibenachse ($= z$ -Achse). Interpretieren Sie das Ergebnis für große $|z|$!

- (b) Zeigen Sie, daß $\Phi(\mathbf{r})$ am Scheibenrand folgenden Wert annimmt,

$$\Phi_0(R) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{4Q}{\pi R}.$$

Nutzen Sie dieses Ergebnis, um die elektrostatische Energie U der Scheibe ("Aufladungsenergie") zu berechnen!

Für alle übrigen Punkte $\mathbf{r}$ im Raum (weder auf der Scheibenachse noch am Rand) führt $\Phi(\mathbf{r})$ auf ein elliptisches Integral, das sich nicht elementar auswerten läßt.

Aufgabe 2: Homogen geladene Scheibe in 2D

Viel einfacher wird die Elektrostatik einer Kreisscheibe in einer (hypothetischen) zweidimensionalen (2D) Welt:

- (a) Wie würde das Gaußsche Gesetz der Elektrostatik in der 2D Welt ($= x, y$ -Ebene) lauten? (Im ladungsfreien Gebiet sollen keine elektrischen Feldlinien entspringen!) Wie sähe dann das Coulomb-Gesetz aus?
- (b) Bestimmen Sie damit das elektrische Feld $\mathbf{E}_{2D}(\mathbf{r})$ der Kreisscheibe aus Aufgabe 1, jetzt jedoch bei Abwesenheit der dritten Raumdimension! Wie sieht das entsprechende elektrostatische Potential $\Phi_{2D}(\mathbf{r})$ aus? Kann man eine anfangs neutrale Scheibe in 2D bis zu einem endlichen Wert Q aufladen?

Aufgabe 3: Bildladungen

Zwei leitende Halbebenen stehen senkrecht zur x, y -Ebene, schneiden sich entlang der z -Achse und genügen den Gleichungen $y/x = \pm \tan(\pi/6)$ ($x > 0$). Bei $x = a > 0$ auf der x -Achse befindet sich eine Punktladung Q . Gesucht ist das elektrostatische Potential in dem Raumsektor zwischen den Halbebenen, der die Punktladung enthält.

- (a) Bestimmen Sie *sämtliche* Bildladungen.
- (b) Die leitenden Halbebenen schließen den Winkel $\pi/3$ ein. Für welche anderen Winkel würde diese Lösungsmethode ebenfalls zum Ziel führen?
- (c) Wie verhält sich das elektrostatische Potential $\Phi(r, 0, 0)$ auf der x -Achse bei großen Abständen $r \gg a$? Welches ist die führende Potenz von r ?

Aufgabe 4: Zylinderkondensator

Berechnen Sie mit Hilfe des Gaußschen Gesetzes die Kapazität eines Kondensators aus zwei konzentrischen leitenden Zylindern der Länge L mit Radien a bzw. b (wobei $a < b \ll L$).

Problem 1: Uniformly charged disk in 3D

Consider an infinitely thin circular disk with radius R in the x, y -plane, centered at the origin. A charge Q is distributed uniformly over this disk.

- (a) Find the electrostatic potential of the charged disk,

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3\mathbf{r}' \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|},$$

at any position $\mathbf{r}$ on the axis of symmetry ($= z$ -axis). What is the asymptotic behavior of Φ for large $|z|$? Interpretation?

- (b) Show that $\Phi(\mathbf{r})$ at the rim of the disk is given by

$$\Phi_0(R) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{4Q}{\pi R}.$$

Use this result to find the electrostatic (“charging”) energy U of the disk!

For any other position $\mathbf{r}$ in space (away from axis and rim), $\Phi(\mathbf{r})$ yields an elliptic integral, that cannot be evaluated analytically.

Problem 2: Uniformly charged disk in 2D

In a (hypothetical) two-dimensional (2D) world, the electrostatics of a circular disk would be simplified considerably:

- (a) How would Gauss' law of electrostatics be modified in a 2D world ($= x, y$ -plane)? (Electric field lines shall not originate from regions without charge!) What would Coulomb's law look like?
- (b) Find the electric field $\mathbf{E}_{2D}(\mathbf{r})$ of the circular disk of problem 1 anywhere in the x, y -plane (but now in the absence of the third spatial dimension)! What does the corresponding electrostatic potential $\Phi_{2D}(\mathbf{r})$ look like? Is it possible to charge a neutral disk in 2D up to a finite value Q ?

Problem 3: Image charges

Two conducting (semi) planes are perpendicular to the x, y -plane, intersect at the z -axis, and are fixed by the equations $y/x = \pm \tan(\pi/6)$ ($x > 0$). A point charge Q sits on the x -axis at $x = a > 0$. We are looking for the electrostatic potential in the spatial sector between the two planes that contains the point charge.

- (a) Find *all* image charges.
- (b) The angle between the conducting planes is $\pi/3$. For what other angles would this image-charge analysis work?
- (c) How does the electrostatic potential on the x -axis, $\Phi(r, 0, 0)$, behave at large distances $r \gg a$? What is the leading power of r ?

Problem 4: Zylindrical capacitor

Using Gauss' law, calculate the capacitance of two concentric conducting cylinders of length L , large compared to their radii a, b ($a < b$).

Übungen zur Theoretischen Physik II (Elektrodynamik)

Blatt 4

Aufgabe 1: Greensche Funktion

Betrachten Sie ein Potentialproblem im Halbraum $z \geq 0$ mit Dirichletschen Randbedingungen in der xy -Ebene (sowie im Unendlichen).

- (a) Schreiben Sie die entsprechende Greensche Funktion $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ auf.
- (b) Der Wert des Potentials $\Phi(\mathbf{r})$ sei in der xy -Ebene vorgegeben: $\Phi = V$ innerhalb des Kreises mit Radius a um den Ursprung, sowie $\Phi = 0$ außerhalb dieses Kreises. Bestimmen Sie für $\Phi(\mathbf{r})$ an einem Punkt $\mathbf{r}$ im Halbraum $z \geq 0$ einen Integralausdruck in Zylinderkoordinaten (ρ, ϕ, z) .
- (c) Zeigen Sie, daß $\Phi(\mathbf{r})$ auf der z -Achse ($\rho = 0$) gegeben ist durch

$$\Phi = V \left(1 - \frac{z}{\sqrt{a^2 + z^2}} \right).$$

- (d) Zeigen Sie, daß sich das Potential in großen Abständen ($\rho^2 + z^2 \equiv r^2 \gg a^2$) in eine Potenzreihe bezüglich r^{-1} entwickeln läßt, mit den führenden Termen

$$\Phi = \frac{Va^2}{2} \frac{z}{r^3} \left[1 - \frac{3a^2}{4r^2} + \frac{5(3\rho^2 a^2 + a^4)}{8r^4} + \dots \right].$$

Zeigen Sie, daß die Ergebnisse von Teil (c) und (d) im gemeinsamen Gültigkeitsbereich konsistent sind.

Aufgabe 2: Kugel mit Oberflächenladung

Auf der Oberfläche S einer Hohlkugel vom Radius R befinde sich die fixierte Flächenladung $\sigma(\theta) = \sigma_0 \cos \theta$, wobei σ_0 eine Konstante und θ den Polarwinkel bezeichnet. Innerhalb und außerhalb dieser Kugel herrsche Vakuum (ohne Ladungen).

- (a) Berechnen Sie Potential $\Phi(\mathbf{r})$ und elektrisches Feld $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ innerhalb und außerhalb der Kugel mittels Variablenseparation.

(b) Warum ist folgender Ausdruck äquivalent zum Ergebnis von Teil (a)?

$$\Phi(\mathbf{r}) = \mp \frac{1}{4\pi} \frac{\sigma_0 R}{3\epsilon_0} \oint_S d\Omega' \cos\theta' \frac{R(r^2 - R^2)}{(r^2 + R^2 - 2rR\cos\gamma)^{3/2}},$$

worin $\cos\gamma = \cos\theta\cos\theta' + \sin\theta\sin\theta'\cos(\phi - \phi')$ und das obere (untere) Vorzeichen innerhalb (außerhalb) der Kugel gilt.

Aufgabe 3: Leitende Kugel im homogenen Feld

Eine leitende Kugel vom Radius R mit Ladung Q wird in ein (ursprünglich) homogenes elektrisches Feld $\mathbf{E}_0 = E_0\hat{z}$ gebracht. Bestimmen Sie das Potential innerhalb und außerhalb der Kugel. Benutzen Sie nicht die Spiegelladungsmethode, sondern lösen Sie das Problem in Kugelkoordinaten mit Variablenseparation.

Aufgabe 4: Geladene Ebene

Die xy -Ebene sei mit einer periodisch variierenden Flächenladungsdichte besetzt,

$$\rho(\mathbf{r}) = \sigma(x, y) \delta(z), \quad \sigma(x, y) = \sigma_0 \sin(\alpha x) \sin(\beta y).$$

Welches Potential wird dadurch im Raum erzeugt? Benutzen Sie auch hier die Methode der Variablenseparation. Vergleichen Sie mit dem Fall einer homogen geladenen Ebene, $\sigma(x, y) \equiv \sigma_0 = \text{const.}$

Problem 1: Green function

Consider a potential problem in the half-space defined by $z \geq 0$, with Dirichlet boundary conditions in the xy -plane (and at infinity).

- (a) Write down the corresponding Green function $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$.
- (b) If the potential in the xy -plane is specified to be $\Phi = V$ inside a circle of radius a centered at the origin, and $\Phi = 0$ outside of that circle, find an integral expression for the potential at the point $\mathbf{r}$ specified in terms of cylindrical coordinates (ρ, ϕ, z) .
- (c) Show that along the z -axis ($\rho = 0$) the potential is given by

$$\Phi = V \left(1 - \frac{z}{\sqrt{a^2 + z^2}} \right).$$

- (d) Show that at large distances ($\rho^2 + z^2 \equiv r^2 \gg a^2$) the potential can be expanded in a power series in r^{-1} , and that the leading terms are

$$\Phi = \frac{Va^2}{2} \frac{z}{r^3} \left[1 - \frac{3a^2}{4r^2} + \frac{5(3\rho^2 a^2 + a^4)}{8r^4} + \dots \right].$$

Verify that this result is consistent with the one of part (c) in their common range of validity.

Problem 2: Sphere with surface charge

Consider an infinitely thin spherical shell of radius R with surface S on which there is a fixed surface charge density $\sigma(\theta) = \sigma_0 \cos \theta$, where σ_0 is a constant and θ is the polar angle. There is vacuum (i.e. no charges) both inside and outside of the shell.

- (a) Calculate the electrostatic potential $\Phi(\mathbf{r})$ and the electric field $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ both inside and outside of the shell, using separation of variables.
- (b) Why is the following expression equivalent to the result of part (a)?

$$\Phi(\mathbf{r}) = \mp \frac{1}{4\pi} \frac{\sigma_0 R}{3\epsilon_0} \oint_S d\Omega' \cos \theta' \frac{R(r^2 - R^2)}{(r^2 + R^2 - 2rR \cos \gamma)^{3/2}},$$

where $\cos \gamma = \cos \theta \cos \theta' + \sin \theta \sin \theta' \cos(\phi - \phi')$ and the upper (lower) sign refers to $r < R$ ($r > R$).

Problem 3: Conducting sphere in a uniform field

A conducting sphere of radius R carrying a charge Q is placed in an initially uniform electric field $\mathbf{E}_0 = E_0 \hat{z}$. Find the potential at all points inside and outside of the sphere. Do not use the method of mirror images but solve the problem in spherical coordinates by separation of variables.

Problem 4: Charged plane

Consider the charge density

$$\rho(\mathbf{r}) = \sigma(x, y) \delta(z), \quad \sigma(x, y) = \sigma_0 \sin(\alpha x) \sin(\beta y),$$

describing a periodically varying surface charge in the xy -plane. Find the potential at any point $\mathbf{r} = \{x, y, z\}$ in space, using separation of variables. Compare to the corresponding result for a uniformly charged plane, $\sigma(x, y) \equiv \sigma_0 = \text{const}$.

Übungen zur Theoretischen Physik II (Elektrodynamik)

Blatt 5

Aufgabe 1: Multipolmomente

- (a) Berechnen Sie die Multipolmomente $q_{\ell m}$ eines Systems aus den folgenden vier Punktladungen: $q_1 = +q$ bei $(x, y, z) = (0, a, 0)$, $q_2 = -q$ bei $(-a, 0, 0)$, $q_3 = +q$ bei $(0, -a, 0)$ und $q_4 = -q$ bei $(a, 0, 0)$. Versuchen Sie, Ergebnisse für die nichtverschwindenden Momente aller Ordnungen ℓ zu erhalten. Geben Sie auf jeden Fall alle Momente der beiden niedrigsten Ordnungen an.
- (b) Ebenso wie in Teil (a), nun jedoch für die drei Ladungen $q_1 = +q$ bei $(0, 0, a)$, $q_2 = +q$ bei $(0, 0, -a)$ und $q_3 = -2q$ bei $(0, 0, 0)$.
- (c) Geben Sie die Multipolentwicklung für das Potential der Ladungsverteilung aus Teil (b) an. Plotten Sie den führenden Term in der xy -Ebene als Funktion des Abstands r vom Ursprung (für $r > a$).
- (d) Berechnen Sie direkt aus dem Coulomb-Gesetz das exakte Potential dieser Ladungsverteilung in der xy -Ebene als Funktion von r und vergleichen Sie mit dem Plot aus Teil (c).

Aufgabe 2

Die Oberfläche einer leitenden Hohlkugel mit dem inneren Radius R wird auf dem Potential (in Kugelkoordinaten)

$$V(\theta, \phi) = V \operatorname{sgn}[\sin(n\phi)]$$

gehalten, wobei V eine Konstante, $\operatorname{sgn}[x]$ das Vorzeichen von x und n eine positive ganze Zahl ist. Stellen Sie eine Reihenentwicklung für das Potential innerhalb der Kugel auf. Bestimmen Sie genau, welche Koeffizienten dieser Entwicklung von Null verschieden sind. Schreiben Sie diese explizit als Integrale über $u = \cos \theta$.

Aufgabe 3

Grund- und Deckfläche eines hohlen geraden Kreiszylinders mit Radius R um die z -Achse befinden sich bei $z = 0$ bzw. $z = L$. Während diese beiden Flächen auf Potential Null liegen, sei das Potential auf der Mantelfläche gegeben durch $V(\phi, z)$. Bestimmen Sie mittels Variablenseparation das Potential im Innern des Zylinders in Form einer Reihe.

Hinweise:

- In der Differentialgleichung für $Z(z)$ sollte k^2 durch $-k^2$ ersetzt werden. (Warum?)
- Erinnern Sie sich an die in der Vorlesung eingeführten modifizierten Bessel-Funktionen.

Aufgabe 4

- (a) Entwickeln Sie die nach der Bildladungsmethode bekannte Greensche Funktion innerhalb einer Kugel in Kugelflächenfunktionen.

Hinweis: Benutzen Sie die aus der Vorlesung bekannte Entwicklung von $1/|\vec{x} - \vec{x}'|$ in Kugelflächenfunktionen.

Die Dichte einer Linienladung der Länge $2s$ mit Gesamtladung Q soll variieren wie $(s^2 - z^2)$, wobei z der Abstand vom Mittelpunkt ist. Zentriert um diesen Mittelpunkt befindet sich eine geerdete leitende Hohlkugel vom Radius $R > s$.

- (b) Bestimmen Sie das Potential innerhalb dieser Kugel als eine Entwicklung nach Legendre-Polynomen.
- (c) Berechnen Sie die auf der Kugelschale induzierte Flächenladungsdichte.
- (d) Diskutieren Sie Ihre Ergebnisse von Teil (b) und (c) im Grenzfall $s \ll R$.
-

Problem 1: Multipole moments

- (a) Calculate the multipole moments $q_{\ell m}$ of the following system of four point charges: $q_1 = +q$ at $(x, y, z) = (0, a, 0)$, $q_2 = -q$ at $(-a, 0, 0)$, $q_3 = +q$ at $(0, -a, 0)$, and $q_4 = -q$ at $(a, 0, 0)$. Try to obtain results for the nonvanishing moments for all ℓ , but find the first two sets of nonvanishing moments at the very least.
- (b) The same as in part (a), but now for the three point charges $q_1 = +q$ at $(0, 0, a)$, $q_2 = +q$ at $(0, 0, -a)$, and $q_3 = -2q$ at $(0, 0, 0)$.
- (c) Write down the multipole expansion for the potential of the charge distribution in part (b). Plot the lowest-order term of this expansion in the xy -plane as a function of the distance r from the origin (for $r > a$).
- (d) Calculate directly from Coulomb's law the exact potential of the charge distribution in (b) in the xy -plane as a function of r and compare with the plot in (c).

Problem 2

The surface of a hollow conducting sphere of inner radius R is held at the potential (in spherical coordinates)

$$V(\theta, \phi) = V \operatorname{sgn}[\sin(n\phi)]$$

where V is a constant, $\operatorname{sgn}[x]$ is the sign of x , and n is a positive integer. Set up a series representation for the potential inside the sphere, and carry the calculation of its coefficients far enough to determine exactly which of them are different from zero. For the nonvanishing terms, exhibit the coefficients as an integral over $u = \cos \theta$.

Problem 3

A hollow right circular cylinder of radius R has its axis coincident with the z -axis and its ends at $z = 0$ and $z = L$. The potential on the end faces is zero, while on the cylindrical surface it is given as $V(\phi, z)$. Using the appropriate separation of variables, find a series solution for the potential anywhere inside the cylinder.

Hints:

- In the differential equation for $Z(z)$, k^2 should be replaced by $-k^2$. (Why?)
- Recall the modified Bessel functions that were introduced in class.

Problem 4

- (a) In class we obtained the Green function inside a sphere from the method of images. Expand this result in spherical harmonics.

Hint: Use the expansion of $1/|\vec{x} - \vec{x}'|$ in spherical harmonics that we derived in class.

A line charge of length $2s$ with a total charge Q has a linear charge density varying as $(s^2 - z^2)$, where z is the distance from the midpoint. A grounded, conducting, spherical shell of inner radius $R > s$ is centered at that midpoint.

- (b) Find the potential everywhere inside the spherical shell as an expansion in Legendre polynomials.
- (c) Calculate the surface charge density induced on the shell.
- (d) Discuss your answers to parts (b) and (c) in the limit that $s \ll R$.

Übungen zur Theoretischen Physik II (Elektrodynamik)

Blatt 6

Aufgabe 1: Geladener Ring

Ein unendlich dünner kreisförmiger Draht vom Radius R sei homogen geladen. Wählen Sie den Kreismittelpunkt als Ursprung und die Kreisachse als z -Richtung.

- (a) Berechnen Sie das elektrostatische Potential $\Phi(\mathbf{r})$ zunächst auf der z -Achse.
- (b) Nutzen Sie dieses Ergebnis als Randbedingung, um für $\Phi(\mathbf{r})$ im gesamten Raum eine Reihenentwicklung nach Legendre-Polynomen zu gewinnen.

Aufgabe 2: Streufeld eines Plattenkondensators

Die beiden Halbebenen $y = \pm \frac{d}{2}$ (mit $x < 0$) senkrecht zur xy -Ebene werden auf Potential $\pm \frac{U}{2}$ gehalten.

- (a) Bestimmen Sie das exakte Potential $\Phi(x, y)$ dieses Plattenkondensators (auch in Randnähe) mit Hilfe der konformen Abbildung

$$x + iy = e^{iw} + (1 + iw), \quad w = u(x, y) + iv(x, y).$$

Hinweis: Es reicht, wenn Sie einen Ausdruck für Φ finden, der nur implizit von x und y abhängt.

- (b) Zeichnen Sie die Äquipotentiallinien $\Phi = \pm \frac{U}{4}$ in der xy -Ebene.

Aufgabe 3: Punktdipol

- (a) Bestimmen Sie die Koeffizienten A , B , C der Funktion

$$\delta_a(x) = \begin{cases} Ax^4 + Bx^2 + C & : |x| < a, \\ 0 & : |x| > a \end{cases}$$

so, daß $\int dx \delta_a(x) = 1$ und daß $\delta_a(x)$ bei $x = \pm a$ stetig differenzierbar ist. Skizzieren Sie $\delta_a(x)$ und $\delta'_a(x)$. Begründen Sie durch Grenzübergang $a \rightarrow 0$ die Definition der Ableitung der δ -Funktion, $\int dx f(x) \delta'(x) = -f'(x)$.

- (b) Bei $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0$ befinde sich ein Punktdipol mit Dipolmoment $\mathbf{p}$. Zeigen Sie, daß dieser zur Berechnung seines Potentials Φ bzw. seiner Energie in einem äußeren Feld durch folgende effektive Ladungsdichte beschrieben werden kann,

$$\rho_{\text{eff}}(\mathbf{x}) = -\mathbf{p} \cdot \nabla \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0).$$

Aufgabe 4: Magnetfeld in einer Bohrung

In einem unendlich langen zylindrischen Leiter mit Radius R befindet sich eine ebenfalls zylindrische Bohrung mit Radius a , deren Achse im Abstand d parallel zu der des Leiters verläuft ($d + a < R$). Im Leiter (außerhalb der Bohrung) fließt Strom mit homogener, achsenparalleler Stromdichte. Bestimmen Sie mit Hilfe des Ampèreschen Gesetzes und des Prinzips der linearen Superposition Stärke und Richtung der magnetischen Flußdichte $\mathbf{B}$ in der Bohrung.

Problem 1: Charged ring

An infinitely thin, uniformly charged circular wire of radius R lies in the xy -plane with its center at the origin.

- (a) Find the electrostatic potential $\Phi(\mathbf{r})$ on the z -axis.
(b) Use this result as a boundary condition to obtain $\Phi(\mathbf{r})$ at any point $\mathbf{r}$ in space as an expansion in terms of Legendre polynomials.

Problem 2: Edge effects in a parallel plate capacitor

The two semi-infinite planes defined by $y = \pm \frac{d}{2}$ (with $x < 0$), perpendicular to the xy -plane, are held at the potentials $\pm \frac{U}{2}$, respectively.

- (a) Find the exact potential $\Phi(x, y)$ of this parallel plate capacitor (also near the edges) using the conformal map

$$x + iy = e^{iw} + (1 + iw), \quad w = u(x, y) + iv(x, y).$$

Hint: It suffices to find an expression for Φ that depends on x and y implicitly.

- (b) Plot the lines of constant potential $\Phi = \pm \frac{U}{4}$ in the xy -plane.

Problem 3: Point dipole

- (a) Determine the coefficients A , B , C of the function

$$\delta_a(x) = \begin{cases} Ax^4 + Bx^2 + C & : |x| < a, \\ 0 & : |x| > a \end{cases}$$

such that $\int dx \delta_a(x) = 1$ and such that $\delta_a(x)$ is continuously differentiable at $x = \pm a$. Sketch $\delta_a(x)$ and $\delta'_a(x)$. By taking the limit $a \rightarrow 0$, show that the derivative of the δ -function satisfies $\int dx f(x) \delta'(x) = -f'(x)$.

- (b) A point dipole with dipole moment $\mathbf{p}$ is located at $\mathbf{x}_0$. Show that for calculation of its potential Φ or its energy in an external field, the dipole can be described by an effective charge density

$$\rho_{\text{eff}}(\mathbf{x}) = -\mathbf{p} \cdot \nabla \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0).$$

Problem 4: Magnetic field in a bore

A cylindrical conductor of radius R has a hole of radius a bored parallel to, and centered a distance d from, the cylinder axis ($d + a < R$). The current density is uniform throughout the remaining metal of the cylinder and is parallel to the axis. Use Ampère's law and the principle of linear superposition to find the magnitude and the direction of the magnetic-flux density $\mathbf{B}$ in the hole.

Übungen zur Theoretischen Physik II (Elektrodynamik)

Blatt 7

Aufgabe 1: Orthogonale Funktionensysteme

- (a) Skizzieren Sie die Graphen der Legendre-Polynome $P_\ell(x)$ für $\ell \leq 4$ im Intervall $x \in [-1, 1]$.
- (b) Betrachten Sie die Fourier-Reihe

$$f(x) \equiv 2x^4 - 4x^2 + 1 = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos(n\pi x), \quad x \in [-1, 1].$$

Berechnen Sie die ersten beiden Koeffizienten a_0 und a_1 .

- (c) Welchen Wert besitzt die Reihensumme $2a_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$?
Welche Abschätzung ergibt sich daraus für die Koeffizienten a_n mit $n \geq 2$?
- (d) Berechnen Sie *sämtliche* Koeffizienten der Entwicklung von $f(x)$ nach Legendre-Polynomen.

Aufgabe 2: Magnetische Induktion einer Stromschleife

- (a) Begründen Sie folgende Beziehungen! ($\mathbf{a}$ ist ein konstanter Vektor.)

$$(\mathbf{a} \cdot \nabla') \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} = -(\mathbf{a} \cdot \nabla) \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}, \quad \nabla \cdot \left(\frac{\mathbf{r}}{r^3} \right) = 0 \quad (r \neq 0).$$

- (b) Eine geschlossene, vom Strom I durchflossene, ebene Leiterschleife ∂S erzeugt am Ort $\mathbf{r}$ die magnetische Induktion $\mathbf{B}(\mathbf{r})$. Zeigen Sie, daß

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = -\frac{\mu_0 I}{4\pi} \nabla \Omega(\mathbf{r}), \quad \Omega(\mathbf{r}) = \int_S d\vec{\sigma}' \cdot \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}.$$

Hinweis: Der Stokessche Satz läßt sich nicht direkt auf das Kurvenintegral

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_{\partial S} d\mathbf{l}' \times \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}$$

anwenden. Multiplizieren Sie daher mit einem konstanten Vektor $\mathbf{a}$ und benutzen die Regel $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b} \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{a})$. Beachten Sie auch Teil (a)! Nutzen Sie aus, daß der Vektor $\mathbf{a}$ beliebig gewählt werden kann.

- (c) Warum ist $|\Omega(\mathbf{r})|$ der *Raumwinkel*, unter dem die Schleife vom Ort $\mathbf{r}$ aus gesehen erscheint?
- (d) Verifizieren Sie die in Teil (b) bewiesene Beziehung für Punkte $\mathbf{r}$ auf der Achse (z -Achse) einer *kreisförmigen* Leiterschleife vom Radius R . Berechnen Sie für diesen Fall $\Omega(\mathbf{r})$ und $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ im gesamten Raum für $|\mathbf{r}| \gg R$.

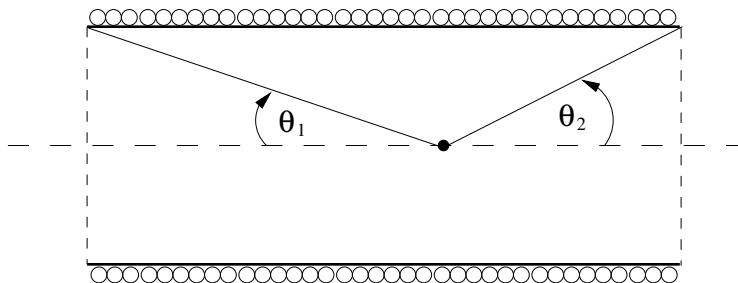
Aufgabe 3: Spule mit endlicher Länge

Eine gerade Kreisspule mit Länge L und Radius R besitze N Windungen pro Längeneinheit und führe den Strom I . Zeigen Sie, daß die magnetische Induktion auf der Zylinderachse (z -Achse) im Grenzfall $NL \rightarrow \infty$ gegeben ist durch

$$B_z = \frac{\mu_0 N I}{2} (\cos \theta_1 + \cos \theta_2).$$

(Die Winkel θ_1 und θ_2 sind in der Abbildung erläutert.)

Hinweis: Betrachten Sie zunächst eine *einzelne* kreisförmige Leiterschleife (wie in Aufgabe 2d). Für die Summation über viele Schleifen ist eine geschickt gewählte Winkelfunktion als Integrationsvariable günstiger als die Koordinate z .



Aufgabe 4: Rotierende geladene Vollkugel

Eine homogen geladene Vollkugel mit Radius R und Gesamtladung Q möge mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω um ihre Achse (z -Achse) rotieren.

- (a) Geben Sie für diesen Fall Ladungsdichte $\rho(\mathbf{r})$ und Stromdichte $\mathbf{J}(\mathbf{r})$ an.
- (b) Berechnen Sie das magnetische Moment $\mathbf{m}$ dieser Stromverteilung.
- (c) Berechnen Sie auch den mechanischen Drehimpuls $\mathbf{L}$ der rotierenden Kugel (Gesamtmasse M). Welcher Zusammenhang besteht zwischen $\mathbf{L}$ und $\mathbf{m}$?
-

Problem 1: Sets of orthogonal functions

- (a) Sketch the Legendre polynomials $P_\ell(x)$ graphically for $\ell \leq 4$ and for $x \in [-1, 1]$.
- (b) Consider the Fourier series

$$f(x) \equiv 2x^4 - 4x^2 + 1 = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos(n\pi x), \quad x \in [-1, 1].$$

Calculate the first two coefficients a_0 and a_1 .

- (c) What is the exact value of the infinite sum $2a_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$?
What can you conclude from this result for the coefficients a_n with $n \geq 2$?
- (d) Find *all* coefficients in the expansion of $f(x)$ in terms of Legendre polynomials $P_\ell(x)$.

Problem 2: Magnetic induction of a current loop

- (a) Prove the following relations! ($\mathbf{a}$ is a constant vector.)

$$(\mathbf{a} \cdot \nabla') \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} = -(\mathbf{a} \cdot \nabla) \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}, \quad \nabla \cdot \left(\frac{\mathbf{r}}{r^3} \right) = 0 \quad (r \neq 0).$$

- (b) A closed planar loop ∂S carrying a current I generates a magnetic induction $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ at the point P with coordinate $\mathbf{r}$. Show that

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = -\frac{\mu_0 I}{4\pi} \nabla \Omega(\mathbf{r}), \quad \Omega(\mathbf{r}) = \int_S d\sigma' \cdot \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}.$$

Hint: In order to apply Stokes' theorem to the contour integral

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_{\partial S} d\mathbf{l}' \times \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3},$$

multiply first with an arbitrary constant vector $\mathbf{a}$ and make use of $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b} \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{a})$. Recall part (a)! Utilize the fact that the vector $\mathbf{a}$ may be chosen arbitrarily.

- (c) Why is $\Omega(\mathbf{r})$ the solid angle subtended by the loop at P ?
- (d) Verify the relation proved in part (b) for points $\mathbf{r}$ on the axis (z -axis) of a *circular* current loop with radius R . In this case, find $\Omega(\mathbf{r})$ and $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ at any point $\mathbf{r}$ in space with $|\mathbf{r}| \gg R$.

Problem 3: Solenoid of finite length

A right-circular solenoid of finite length L and radius R has N turns per unit length and carries a current I . Show that, in the limit $NL \rightarrow \infty$, the magnetic induction on the cylinder axis (z -axis) is

$$B_z = \frac{\mu_0 N I}{2} (\cos \theta_1 + \cos \theta_2),$$

where the angles are defined in the figure (see the German section).

Hint: Consider first a *single* circular current loop (such as the one in problem 2d). Then, to compute the sum over many loops, a properly chosen angular function is more appropriate as an integration variable than the z coordinate.

Problem 4: Uniformly charged rotating sphere

A uniformly charged sphere with radius R and total charge Q is rotating with a constant angular velocity ω around its axis (z -axis).

- (a) Find expressions for $\rho(\mathbf{r})$ and $\mathbf{J}(\mathbf{r})$, the densities of charge and current, respectively.
- (b) Calculate the magnetic moment $\mathbf{m}$ of this current distribution.
- (c) Evaluate also the mechanical angular momentum $\mathbf{L}$ of the rotating sphere (with total mass M). How are $\mathbf{L}$ and $\mathbf{m}$ related to each other?

Übungen zur Theoretischen Physik II (Elektrodynamik)

Blatt 8

Aufgabe 1: Wellen

- (a) Spezialisieren Sie die allgemeine Lösung der homogenen Wellengleichung,

$$\Phi_{\text{hom}}(\mathbf{r}, t) = \text{Re} \int d^3k \left[a_1(\mathbf{k}) + ia_2(\mathbf{k}) \right] e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)},$$

auf den eindimensionalen Fall $\Phi(\mathbf{r}, t) = \Phi(x, t)$. Zeigen Sie, daß

$$\Phi_{\text{hom}}(x, t) = f(x - ct) + g(x + ct)$$

mit zwei beliebigen, differenzierbaren Funktionen $f(x)$ und $g(x)$.

- (b) Verifizieren Sie durch direktes Einsetzen in die Wellengleichung, daß es sich um eine Lösung handelt. Diskutieren Sie die Zeitabhängigkeit einer solchen Welle für $f(x) = e^{-\alpha x^2}$ und $g(x) = 0$.

Aufgabe 2: Magnetfeld im Plattenkondensator

Ein Plattenkondensator aus zwei Kreisscheiben (Radius r_0 , Abstand d) wird langsam über einen Widerstand R entladen. Die Spannung $\frac{1}{C}Q(t)$ am Kondensator ist dann gleich der Spannung $RI(t)$ am Widerstand.

- (a) Bestimmen Sie die Ladung $Q(t)$ auf dem Kondensator [wobei $Q(0) = Q_0$].
(b) Bei Vernachlässigung der Randeffekte ist der Betrag des elektrischen Feldes gleich $E(t) = \frac{1}{Cd}Q(t)$ zwischen den Scheiben und gleich null im Außenbereich. Bestimmen sie das magnetische Feld $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$.

Aufgabe 3: Wellenpaket

Die Potentiale eines elektromagnetischen Wellenpaketes seien

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{e}_z \int dk f(k) e^{ik(x-ct)}, \quad \Phi(\mathbf{r}, t) = 0.$$

Bestimmen Sie die Felder $\mathbf{E}$ und $\mathbf{B}$ für die Fälle

- (a) $f(k) = f_0$ für $|k| \leq k_0$ und $f(k) = 0$ für $|k| > k_0$,
(b) $f(k) = f_0 e^{-\alpha|k-k_0|}$.

Skizzieren Sie jeweils die Form des Wellenpakets im Ortsraum. Geben Sie sein Zentrum $\bar{x}$ und seine Breite Δx an.

Aufgabe 4: Maxwellscher Spannungstensor

Betrachten Sie den Maxwellschen Spannungstensor $\mathcal{T}$, mit den Komponenten

$$T_{ij} = \epsilon_0 \left(E_i E_j - \frac{1}{2} \delta_{ij} E^2 \right) + \frac{1}{\mu_0} \left(B_i B_j - \frac{1}{2} \delta_{ij} B^2 \right),$$

für den Fall einer homogen geladenen Vollkugel (Ladung Q , Radius R).

Bestimmen Sie damit die Kraft, welche von der südlichen Hälfte der Kugel auf ihre nördliche Hälfte ausgeübt wird.

Problem 1: Waves

- (a) Consider the general solution to the homogeneous wave equation,

$$\Phi_{\text{hom}}(\mathbf{r}, t) = \text{Re} \int d^3k \left[a_1(\mathbf{k}) + i a_2(\mathbf{k}) \right] e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)}.$$

Show that its one-dimensional version $\Phi(\mathbf{r}, t) = \Phi(x, t)$ can be written as

$$\Phi_{\text{hom}}(x, t) = f(x - ct) + g(x + ct),$$

with two arbitrary differentiable functions $f(x)$ und $g(x)$.

- (a) By direct insertion into the wave equation, verify that $f(x - ct) + g(x + ct)$ is a solution. Discuss the time dependence of such a wave for the case $f(x) = e^{-\alpha x^2}$ and $g(x) = 0$.

Problem 2: Magnetic field in a plate capacitor

A plate capacitor consisting of two circular disks (radius r_0 , distance d) is being discharged slowly via a resistor R . The voltage $\frac{1}{C}Q(t)$ at the capacitor equals the voltage $RI(t)$ at the resistor.

- (a) Find the charge $Q(t)$ on the capacitor [with $Q(t = 0) = Q_0$].
- (b) Neglecting edge effects, the magnitude of the electric field is $E(t) = \frac{1}{Cd}Q(t)$ between the plates and zero outside. Find the magnetic field $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$.

Problem 3: Wave packets

Consider an electromagnetic wave packet with the potentials

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{e}_z \int dk f(k) e^{ik(x-ct)}, \quad \Phi(\mathbf{r}, t) = 0.$$

Find the fields $\mathbf{E}$ and $\mathbf{B}$ for the cases

(a) $f(k) = f_0$ für $|k| \leq k_0$ and $f(k) = 0$ for $|k| > k_0$,

(b) $f(k) = f_0 e^{-\alpha|k-k_0|}$.

In each case, sketch the shape of the wave packet and give its center $\bar{x}$ and its width Δx .

Problem 4: Maxwell's stress tensor

Consider Maxwell's stress tensor $\mathcal{T}$, with the general components

$$T_{ij} = \epsilon_0 \left(E_i E_j - \frac{1}{2} \delta_{ij} E^2 \right) + \frac{1}{\mu_0} \left(B_i B_j - \frac{1}{2} \delta_{ij} B^2 \right),$$

for the case of a uniformly charged (solid) sphere with radius R and charge Q . Using the stress tensor, find the force exerted by the “northern” hemisphere of that sphere onto the “southern” one.

Übungen zur Theoretischen Physik II (Elektrodynamik)

Blatt 9

Aufgabe 1: Quadrupoltensor

Zeigen Sie für einen beliebigen Einheitsvektor $\mathbf{n}$:

$$\mathbf{n} \times \int d^3r \rho(\mathbf{r}) \mathbf{r} (\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}) = \frac{1}{3} \mathbf{n} \times \mathbf{Q}(\mathbf{n}).$$

Hier bezeichnet $\mathbf{Q}(\mathbf{n})$ den Vektor mit den Komponenten $Q_\alpha = \sum_\beta Q_{\alpha\beta} n_\beta$, und

$$Q_{\alpha\beta} = \int d^3r \rho(\mathbf{r}) (3x_\alpha x_\beta - r^2 \delta_{\alpha\beta})$$

sind die Komponenten des Quadrupoltensors.

Aufgabe 2: Dipolstrahlung

Ein Teilchen, das sich mit der Winkelgeschwindigkeit ω auf einem Kreis (Radius $R \ll c/\omega$) bewegt, erzeugt die Ladungsdichte

$$\rho(\mathbf{r}, t) = q \delta(x - R \cos(\omega t)) \delta(y - R \sin(\omega t)) \delta(z).$$

- (a) Berechnen Sie das Dipolmoment $\mathbf{p}(t)$ dieser Ladungsverteilung und geben Sie die komplexe Amplitude $\mathbf{p}$ von $\mathbf{p}(t) = \text{Re}[\mathbf{p}e^{-i\omega t}]$ an.
- (b) Berechnen Sie die Winkelverteilung

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{\mu_0}{32\pi^2 c} \omega^4 (\mathbf{n} \times \mathbf{p}) \cdot (\mathbf{n} \times \mathbf{p}^*)$$

und die gesamte Strahlungsleistung P .

Aufgabe 3: Ausstrahlung zweier Dipole

In einem Draht der Länge $2a$ werde durch eine Wechselspannung folgende Ladungsverteilung erzeugt ($a \ll c/\omega$),

$$\rho(\mathbf{r}, t) = \frac{q}{2a} \delta(x) \delta(y) \Theta(a - |z|) \cos(\pi z/a) e^{-i\omega t}.$$

- (a) Wie groß ist das Dipolmoment $\mathbf{p}(t)$ dieser Ladungsverteilung? Ersetzen Sie sie durch zwei Dipole $\mathbf{p}_1(t)$ und $\mathbf{p}_2(t)$ bei $z = \pm \frac{a}{2}$ und überlagern Sie die entsprechenden Dipolstrahlungsfelder $\mathbf{A}_1(\mathbf{r})$ und $\mathbf{A}_2(\mathbf{r})$ (für $r \gg \lambda$).

Hinweis: Diese Überlagerung läßt sich durch eine Differentiation annähern!

- (b) Welche Stromdichte $\mathbf{J}(\mathbf{r}, t)$ impliziert die angegebene Ladungsverteilung $\rho(\mathbf{r}, t)$?
- (c) Bestätigen Sie mit dieser Stromdichte das Resultat von Teil (a) direkt gemäß

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{e^{ikr}}{r} \int_V d^3r' \mathbf{J}(\mathbf{r}') e^{-ik\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}'},$$

indem Sie in der Entwicklung $e^{-ik\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}'} = 1 - ik\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}' + \dots$ auch den in $\mathbf{r}'$ linearen Term mitnehmen.

Aufgabe 4: Maxwell-Gleichungen und Galilei-Transformation

Die Maxwell-Gleichungen sagen die Existenz von Wellen voraus, die sich mit der universellen Geschwindigkeit $c = (\epsilon_0 \mu_0)^{-1/2}$ ausbreiten.

- (a) Warum können diese Gleichungen damit nicht Galilei-kovariant sein?
- (b) Zeigen Sie explizit, daß die Wellengleichung

$$\nabla^2 \Psi(\mathbf{r}, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Psi(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2} = 0$$

nicht forminvariant ist unter Galilei-Transformationen,

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r} - \mathbf{v}t, \quad t' = t.$$

Problem 1: Quadrupole tensor

For an arbitrary unit vector $\mathbf{n}$, show that

$$\mathbf{n} \times \int d^3r \rho(\mathbf{r}) \mathbf{r} (\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}) = \frac{1}{3} \mathbf{n} \times \mathbf{Q}(\mathbf{n}).$$

Here $\mathbf{Q}(\mathbf{n})$ denotes the vector with components $Q_\alpha = \sum_\beta Q_{\alpha\beta} n_\beta$, and

$$Q_{\alpha\beta} = \int d^3r \rho(\mathbf{r}) (3x_\alpha x_\beta - r^2 \delta_{\alpha\beta})$$

are the components of the quadrupole tensor.

Problem 2: Dipole radiation

A particle, moving with angular velocity ω on a circle (radius $R \ll c/\omega$), generates the charge density

$$\rho(\mathbf{r}, t) = q \delta(x - R \cos(\omega t)) \delta(y - R \sin(\omega t)) \delta(z).$$

- (a) Calculate the dipole moment $\mathbf{p}(t)$ of this charge distribution and find the complex amplitude $\mathbf{p}$ of $\mathbf{p}(t) = \text{Re}[\mathbf{p} e^{-i\omega t}]$.
- (b) Find the angular distribution

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{\mu_0}{32\pi^2 c} \omega^4 (\mathbf{n} \times \mathbf{p}) \cdot (\mathbf{n} \times \mathbf{p}^*)$$

and the total radiation power P .

Aufgabe 3: Radiation of two dipoles

In a straight wire (length $2a$), an alternating voltage gives rise to the following time dependent charge distribution ($a \ll c/\omega$),

$$\rho(\mathbf{r}, t) = \frac{q}{2a} \delta(x) \delta(y) \Theta(a - |z|) \cos(\pi z/a) e^{-i\omega t}.$$

- (a) What is the dipole moment $\mathbf{p}(t)$ of the wire? Replace this charge distribution by two dipoles $\mathbf{p}_1(t)$ and $\mathbf{p}_2(t)$ (located at $z = \pm \frac{a}{2}$) and make a superposition of the corresponding dipole radiation fields $\mathbf{A}_1(\mathbf{r})$ and $\mathbf{A}_2(\mathbf{r})$, respectively (for $r \gg \lambda$).

Hint: This superposition can be achieved by a simple differentiation!

- (b) Which current density $\mathbf{J}(\mathbf{r}, t)$ is implied by the given charge distribution $\rho(\mathbf{r}, t)$?
- (c) Use this current density to obtain the result of part (a) directly from

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{e^{ikr}}{r} \int_V d^3r' \mathbf{J}(\mathbf{r}') e^{-ik\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}'}.$$

To this end, you need to keep in the expansion $e^{-ik\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}'} = 1 - ik\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}' + \dots$ also the term linear in $\mathbf{r}'$.

Aufgabe 4: Maxwell's Equations and Galilean transformations

Maxwell's Equations predict the existence of waves propagating with a universal speed $c = (\epsilon_0\mu_0)^{-1/2}$.

- (a) Why can these equations not be covariant under Galilean transformations?
- (b) Show explicitly that the wave equation

$$\nabla^2\psi(\mathbf{r},t) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\psi(\mathbf{r},t)}{\partial t^2} = 0$$

changes its form under a Galilean transformation,

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r} - \mathbf{v}t, \quad t' = t.$$

Übungen zur Theoretischen Physik II (Elektrodynamik)

Blatt 10

Aufgabe 1: Matrizen der Lorentz-Transformation

- (a) Geben Sie die (4×4) -Matrix der “Lorentz-Transformation” zwischen zwei Systemen K und K' an, die relativ zueinander in Ruhe sind, wobei jedoch die Koordinatenachsen von K' mit dem Winkel ω um die (gemeinsame) z -Achse rotiert sind.
- (b) Gegeben seien zwei achsenparallele Systeme K und K' . In K bewege sich der Ursprung von K' mit der Geschwindigkeit v auf der (gemeinsamen) z -Achse. Zeigen Sie: Die zugehörige Lorentz-Transformation besitzt die Matrixform

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \cosh \zeta & 0 & 0 & -\sinh \zeta \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\sinh \zeta & 0 & 0 & \cosh \zeta \end{pmatrix}.$$

Wie hängt der Parameter ζ mit v zusammen?

Aufgabe 2: Invarianz der elektrischen Ladung

Für den Lorentzvektor $J^\mu(x^\nu)$ gelte $\partial_\mu J^\mu = 0$. Um zu zeigen, daß die Größe $q = \int d^3r \frac{1}{c} J^0(x^\nu)$ ein Lorentzskalar ist, überlegen Sie sich, daß q in der Form

$$q = \frac{1}{c} \int_{x^0=\text{const}} dF_\mu J^\mu$$

geschrieben werden kann. Der Lorentzvektor

$$(dF_\mu) = (dx^1 dx^2 dx^3, dx^0 dx^2 dx^3, dx^0 dx^1 dx^3, dx^0 dx^1 dx^2)$$

stellt das dreidimensionale “Flächen”-Element im vierdimensionalen Minkowski-Raum dar. Machen Sie sich nun die folgenden Schritte klar,

$$c(q' - q) = \int_{x'^0=\text{const}} dF'_\mu J'^\mu - \int_{x^0=\text{const}} dF_\mu J^\mu = \oint dF_\mu J^\mu = \int d^4x \partial_\mu J^\mu = 0.$$

Warum konnte im ersten Integral $dF_\mu J^\mu$ anstelle von $dF'_\mu J'^\mu$ geschrieben werden? Skizzieren Sie die Ergänzung zu einem geschlossenen Integral im x - t -Diagramm. Welche Voraussetzungen sind für diesen Schritt nötig? Das geschlossene (dreidimensionale) “Flächenintegral” wird mit dem Gauß’schen Satz im Minkowski-Raum in ein vierdimensionales Volumenintegral überführt.

Aufgabe 3: Lorentz-Transformation der Feldstärken

Die Ereigniskordinaten $(ct \equiv x^0, \mathbf{x})$ in K gehen bei Lorentz-Transformation in ein achsenparalleles System K' mit Relativgeschwindigkeit $\mathbf{v} = \vec{\beta}c$ über in

$$\begin{aligned}x'^0 &= \gamma(x^0 - \vec{\beta} \cdot \mathbf{x}), \\ \mathbf{x}' &= \mathbf{x} + \frac{\gamma-1}{\beta^2}(\vec{\beta} \cdot \mathbf{x})\vec{\beta} - \gamma\vec{\beta}x^0.\end{aligned}$$

Zeigen Sie, daß die elektromagnetischen Feldstärken $\mathbf{E}$ und $\mathbf{B}$ sich dabei folgendermaßen transformieren

$$\begin{aligned}\mathbf{E}' &= \gamma(\mathbf{E} + \vec{\beta} \times \mathbf{B}) - \frac{\gamma^2}{\gamma+1}\vec{\beta}(\vec{\beta} \cdot \mathbf{E}), \\ \mathbf{B}' &= \gamma(\mathbf{B} + \vec{\beta} \times \mathbf{E}) - \frac{\gamma^2}{\gamma+1}\vec{\beta}(\vec{\beta} \cdot \mathbf{B}).\end{aligned}$$

Aufgabe 4: Kovariante Energie- und Impulserhaltung

Der symmetrische Energie-Impuls-Tensor ist definiert durch

$$\Theta^{\mu\nu} = \frac{1}{4\pi} g^{\mu\alpha} F_{\alpha\beta} F^{\beta\nu} + \frac{1}{16\pi} g^{\mu\nu} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta}.$$

- (a) Zeigen Sie, daß seine Komponenten für $\mu, \nu = 1, 2, 3$ dem Maxwellschen Spannungstensor aus Abschnitt 4.6 der Vorlesung (hier in CGS-Einheiten!) entsprechen,

$$T_{ij} = \frac{1}{4\pi} \left[E_i E_j + B_i B_j - \frac{1}{2} \delta_{ij} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{E} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{B}) \right].$$

- (b) Geben Sie explizite Ausdrücke an für Θ^{00} , Θ^{0i} und Θ^{i0} .
- (c) Zeigen Sie, daß $\partial_\mu \Theta^{\mu\nu} = 0$ die kovariante Form der Erhaltungssätze von Energie ($\nu = 0$) und Impuls ($\nu = 1, 2, 3$) in Abwesenheit von Quellen darstellt,

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{S} &= 0, \\ \frac{\partial g_i}{\partial t} - \sum_{j=1}^3 \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j} &= 0.\end{aligned}$$

(Hier bezeichnen u die Energiedichte des elektromagnetischen Feldes und $\mathbf{S} = c^2 \mathbf{g}$ den Poynting-Vektor.)

Problem 1: Matrices of Lorentz transformations

- (a) What is the (4×4) -matrix of the “Lorentz transformation” from one frame K to another frame K' , which is at rest with respect to K , but whose x - and y -axes are rotated by an angle ω about the (common) z -axis.
- (b) Two frames K and K' have parallel axes. The origin of K' is moving on the z -axis of K with velocity v . Show that the Lorentz transformation from K to K' has the matrix form

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \cosh \zeta & 0 & 0 & -\sinh \zeta \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\sinh \zeta & 0 & 0 & \cosh \zeta \end{pmatrix}.$$

How is the parameter ζ related to v ?

Problem 2: Invariance of electric charge

Let $J^\mu(x^\nu)$ be a Lorentz vector with $\partial_\mu J^\mu = 0$. In order to show that the quantity $q = \int d^3r \frac{1}{c} J^0(x^\nu)$ is a Lorentz scalar, convince yourself that q can be written as

$$q = \frac{1}{c} \int_{x^0=\text{const}} dF_\mu J^\mu.$$

Here, the Lorentz vector

$$(dF_\mu) = (dx^1 dx^2 dx^3, dx^0 dx^2 dx^3, dx^0 dx^1 dx^3, dx^0 dx^1 dx^2)$$

represents the three-dimensional “surface” element in four-dimensional Minkowski space. Now, work out the following steps,

$$c(q' - q) = \int_{x'^0=\text{const}} dF_\mu J^\mu - \int_{x^0=\text{const}} dF_\mu J^\mu = \oint dF_\mu J^\mu = \int d^4x \partial_\mu J^\mu = 0.$$

Why can we write $dF_\mu J^\mu$ instead of $dF'_\mu J'^\mu$ in the first integral? In the second step, the integration path is completed to a closed loop. What assumption is made here? Sketch the loop in an x - t diagram. Eventually, the closed (three-dimensional) “surface” integral is transformed into a four-dimensional volume integral by Gauss’ law.

Problem 3: Lorentz transformation of $\mathbf{E}$ and $\mathbf{B}$

Two frames K and K' have parallel axes. K' is moving in K with velocity $\mathbf{v} = \vec{\beta}c$, such that an event, described in K by $(ct \equiv x^0, \mathbf{x})$, has in K' the coordinates

$$\begin{aligned}x'^0 &= \gamma(x^0 - \vec{\beta} \cdot \mathbf{x}), \\ \mathbf{x}' &= \mathbf{x} + \frac{\gamma-1}{\beta^2}(\vec{\beta} \cdot \mathbf{x})\vec{\beta} - \gamma\vec{\beta}x^0.\end{aligned}$$

Show that the electromagnetic fields $\mathbf{E}$ and $\mathbf{B}$ transform as follows,

$$\begin{aligned}\mathbf{E}' &= \gamma(\mathbf{E} + \vec{\beta} \times \mathbf{B}) - \frac{\gamma^2}{\gamma+1}\vec{\beta}(\vec{\beta} \cdot \mathbf{E}), \\ \mathbf{B}' &= \gamma(\mathbf{B} + \vec{\beta} \times \mathbf{E}) - \frac{\gamma^2}{\gamma+1}\vec{\beta}(\vec{\beta} \cdot \mathbf{B}).\end{aligned}$$

Problem 4: Covariant conservation of energy and momentum

The symmetric energy-momentum tensor is defined as

$$\Theta^{\mu\nu} = \frac{1}{4\pi} g^{\mu\alpha} F_{\alpha\beta} F^{\beta\nu} + \frac{1}{16\pi} g^{\mu\nu} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta}.$$

- (a) Show that its components for $\mu, \nu = 1, 2, 3$ correspond to Maxwell's stress tensor [section 4.6 in the lecture notes; here in CGS units!],

$$T_{ij} = \frac{1}{4\pi} \left[E_i E_j + B_i B_j - \frac{1}{2} \delta_{ij} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{E} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{B}) \right].$$

- (b) Find explicit expressions for Θ^{00} , Θ^{0i} , and Θ^{i0} .
- (c) Show that $\partial_\mu \Theta^{\mu\nu} = 0$ is the covariant form of the conservation laws for energy ($\nu = 0$) and momentum ($\nu = 1, 2, 3$) in the absence of sources,

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{S} = 0,$$

$$\frac{\partial g_i}{\partial t} - \sum_{j=1}^3 \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j} = 0.$$

(Here, u is the energy density of the electromagnetic field and $\mathbf{S} = c^2 \mathbf{g}$ is the Poynting vector.)

Übungen zur Theoretischen Physik II (Elektrodynamik)

Blatt 11

Aufgabe 1: Felder eines stromführenden Leiters

In einem unendlich langen, geraden Metalldraht fließt ein stationärer Strom der Stärke I in z -Richtung. Die strömenden Leitungselektronen sollen sich im Ruhesystem K des Drahtes mit einheitlicher Geschwindigkeit $\mathbf{v} = -v\mathbf{e}_z$ bewegen und durch die positiven Ladungen der Metallionen (zumindest im makroskopischen Mittel) exakt neutralisiert werden. Dann herrscht für einen Beobachter in K außerhalb des Drahtes ein reines Magnetfeld $\mathbf{B}$ (mit $\mathbf{E} \equiv 0$).

- (a) Welche Felder $\mathbf{E}'$ und $\mathbf{B}'$ stellt ein Beobachter fest, der sich mit den Leitungselektronen mitbewegt (System K')?
- (b) Erklären Sie das Ergebnis mit der relativistischen Längenkontraktion.

Aufgabe 2: Zwei zueinander parallel bewegte Ladungen

Zwei identische Teilchen der Ladung Q bewegen sich im Laborsystem K' parallel zueinander im Abstand d mit konstanter Geschwindigkeit $\mathbf{v} = v\mathbf{e}_x$. Ihre zeitabhängigen Positionen in K' seien gegeben durch

$$\mathbf{r}'_1(t') \equiv \begin{pmatrix} x'_1(t') \\ y'_1(t') \\ z'_1(t') \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} vt' \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{r}'_2(t') = \begin{pmatrix} vt' \\ d \\ 0 \end{pmatrix}.$$

- (a) Welche (Lorentz-) Kraft $\mathbf{F}$ üben sie in ihrem gemeinsamen Ruhesystem K aufeinander aus? Welche Kraft $\mathbf{F}'$ ergibt sich (durch Transformation der Felder) im Laborsystem K' ?
- (b) Erklären Sie den Unterschied mit der relativistischen Zeitdilatation.

Aufgabe 3: Relativität der Felder

Diskutieren Sie die Möglichkeit, elektrische oder magnetische Felder durch Wahl geeigneter Bezugssysteme wegzutransformieren. Bestimmen Sie dazu das Verhalten von $\mathbf{E}^2$, $\mathbf{B}^2$ und $\mathbf{E} \cdot \mathbf{B}$ bei Lorentz-Transformationen. Ist eine dieser Größen invariant? Können Sie eine weitere Invariante aus diesen Größen bilden?

Aufgabe 4: Relativistischer Doppler-Effekt

Eine ebene elektromagnetische Welle besitze im System K den Wellenvektor $\mathbf{k}$ und die Kreisfrequenz ω . Die entsprechenden Größen im System K' seien $\mathbf{k}'$ und ω' .

- (a) Warum muß die Phase der Welle eine Invariante sein,

$$\phi(\mathbf{x}, t) \equiv \omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x} = \omega' t' - \mathbf{k}' \cdot \mathbf{x}' \equiv \phi'(\mathbf{x}', t') \quad ?$$

Benutzen Sie das bekannte Transformationsverhalten von $\mathbf{x}$ und t , um den Zusammenhang zwischen $(\omega/c, \mathbf{k})$ und $(\omega'/c, \mathbf{k}')$ zu finden.

Hinweis: Benutzen Sie für $\mathbf{k}$ die Komponenten $\mathbf{k}_{\parallel}$ und $\mathbf{k}_{\perp}$ parallel bzw. senkrecht zur Relativgeschwindigkeit $\vec{\beta}$ zwischen K und K' .

- (b) Was ergibt sich speziell für ω' , wenn $\vec{\beta}$ parallel zu $\mathbf{k}$ (“longitudinale Doppler-Verschiebung”), bzw. senkrecht zu $\mathbf{k}$ steht (“transversale Doppler-Verschiebung”)?
-

Problem 1: Fields of a conductor with current

A stationary current I is flowing in an infinitely long, straight metal wire in the z -direction. In the rest frame K of the wire, all moving electrons have the same velocity $\mathbf{v} = -v\mathbf{e}_z$. Moreover, they are neutralized exactly (at least on the macroscopic average) by the positive charges of the metal ions, such that an observer in K sees a pure magnetic field $\mathbf{B}$, but no electric field ($\mathbf{E} \equiv 0$) in the space around the wire.

- (a) What are the fields $\mathbf{E}'$ and $\mathbf{B}'$ seen by an observer who is moving with the electrons (frame K')?
- (b) Explain the result in terms of relativistic length contraction.

Problem 2: Two charges moving on parallel lines

In the laboratory frame K' , the motion of two identical particles with charge Q is described by the time-dependent position vectors

$$\mathbf{r}'_1(t') \equiv \begin{pmatrix} x'_1(t') \\ y'_1(t') \\ z'_1(t') \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} vt' \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{r}'_2(t') = \begin{pmatrix} vt' \\ d \\ 0 \end{pmatrix}.$$

- (a) What is the (Lorentz) force $\mathbf{F}$ acting between these charges in their common rest frame K ? What force $\mathbf{F}'$ do you find in the laboratory frame K' (by Lorentz transformation of the fields)?
- (b) Explain the difference in terms of relativistic time dilatation.

Problem 3: Relativity of the fields

Investigate the possibility of eliminating electric or magnetic fields by a proper choice of reference frame. To this end, find out how the quantities $\mathbf{E}^2$, $\mathbf{B}^2$, and $\mathbf{E} \cdot \mathbf{B}$ change under Lorentz transformations. Is one of them invariant? Can you construct another invariant from these quantities?

Problem 4: Relativistic Doppler effect

In the reference frame K , a plane electromagnetic wave has wave vector $\mathbf{k}$ and frequency ω . The corresponding quantities in another frame K' are $\mathbf{k}'$ and ω' .

- (a) Why is the phase of the wave an invariant,

$$\phi(\mathbf{x}, t) \equiv \omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x} = \omega' t' - \mathbf{k}' \cdot \mathbf{x}' \equiv \phi'(\mathbf{x}', t') \quad ?$$

Using the Lorentz transformation for $\mathbf{x}$ and t , derive the transformation rule between $(\omega/c, \mathbf{k})$ and $(\omega'/c, \mathbf{k}')$.

Hint: Introduce for $\mathbf{k}$ the components $\mathbf{k}_{\parallel}$ parallel and $\mathbf{k}_{\perp}$ perpendicular, respectively, to the relative velocity $\vec{\beta}$ between K and K' .

- (b) What is the result for ω' if $\vec{\beta}$ is parallel to $\mathbf{k}$ (“longitudinal Doppler shift”) or, respectively, perpendicular to $\mathbf{k}$ (“transverse Doppler shift”)?

Übungen zur Theoretischen Physik II (Elektrodynamik)

Blatt 12 (zur Vorbereitung auf die Klausur)

Aufgabe 1: Dielektrische Kugel im homogenen elektrischen Feld

Eine dielektrische Kugel mit Radius R und Dielektrizitätskonstante ε befinde sich in einem ursprünglich homogenen elektrischen Feld, das weit entfernt von der Kugel durch $\vec{E}_0 = E_0 \hat{z}$ gegeben ist (siehe Vorlesung).

- (a) Zeigen Sie durch Entwicklung der Laplace-Gleichung in Legendre-Polynomen unter Berücksichtigung der Randbedingungen an der Kugeloberfläche, daß das elektrische Feld im Inneren der Kugel gegeben ist durch

$$\vec{E}_{\text{in}} = \frac{3}{\varepsilon + 2} \vec{E}_0 .$$

- (b) Zeigen Sie, daß die Polarisation in der Kugel gegeben ist durch

$$\vec{P} = 3\varepsilon_0 \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} \vec{E}_0$$

- (c) Zeigen Sie, daß das elektrische Feld außerhalb der Kugel gegeben ist durch $\vec{E}_{\text{out}} = \vec{E}_0 + \vec{E}_p$, wobei $\vec{E}_p$ das Feld eines elektrischen Dipols $\vec{p}$ am Mittelpunkt der Kugel ist. Bestimmen Sie $\vec{p}$ und $\vec{E}_{\text{out}}$.

- (d) Skizzieren Sie die elektrischen Feldlinien innerhalb und außerhalb der Kugel.

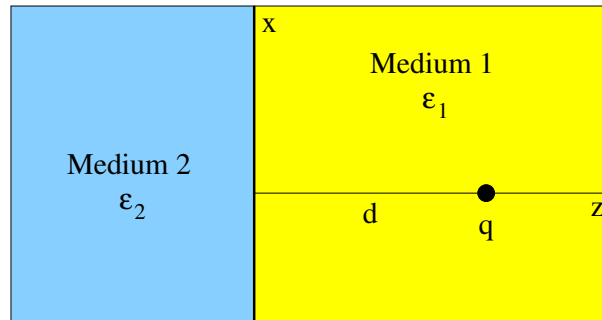
Aufgabe 2: Kugelförmiger Hohlraum in einem dielektrischen Medium

In einem dielektrischen Medium mit Dielektrizitätskonstante ε befinde sich ein kugelförmiger Hohlraum mit Radius R . Außerdem existiere ein äußeres elektrisches Feld $\vec{E}_0 = E_0 \hat{z}$.

Benutzen Sie die Lösungen von Aufgabe 1, um das elektrische Feld innerhalb und außerhalb der Kugel zu berechnen. Skizzieren Sie die elektrischen Feldlinien innerhalb und außerhalb der Kugel.

Aufgabe 3: Punktladung und Dielektrikum

Eine Punktladung q befinde sich in einem Halbraum mit Dielektrizitätskonstante ε_1 im Abstand d von einem anderen Halbraum mit Dielektrizitätskonstante ε_2 . Die Grenzfläche zwischen den beiden Halbräumen liege in der xy -Ebene.



Lösen Sie dieses Problem mit der Spiegelladungsmethode (s. Jackson Kap. 4.4).

- (a) Zeigen Sie, daß sich Poisson-Gleichung und Randbedingungen mit Hilfe von zwei Spiegelladungen lösen lassen. Bestimmen Sie Ort und Größe der Spiegelladungen.
- (b) Skizzieren Sie die elektrischen Feldlinien für $\varepsilon_1 > \varepsilon_2$ und für $\varepsilon_1 < \varepsilon_2$.
- (c) Bestimmen Sie die induzierte Flächenladungsdichte an der Grenzfläche.
- (d) Diskutieren Sie den Grenzfall $\varepsilon_2 \gg \varepsilon_1$.

Aufgabe 4:

Das induzierte elektrische Feld kann im statischen Fall als $\vec{E}_{\text{ind}}(\vec{x}) = -\vec{\nabla}\Phi_{\text{ind}}(\vec{x})$ geschrieben werden. Zeigen Sie

$$\Phi_{\text{ind}}(\vec{x}) = - \int d^3x' \frac{\vec{\nabla} \cdot \vec{P}(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|}.$$

An welchen Stellen ist der Integrand für eine homogen polarisierte Kugel ungleich Null?