zeitabhängige elektromagnetische Felder

Maxwell-Gleichungen $\Rightarrow$ Wellengleichungen

$$\left.\begin{array}{l}\vec\nabla\cdot\vec D=\rho\ ;\quad \vec\nabla\times\vec H=\vec J+\frac{\partial\vec D}{\partial t}\\ \vec\nabla\cdot\vec B=0\ ;\quad \vec\nabla\times\vec E=-\frac{\partial\vec B}{\partial t}\end{array}\right\}\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}\nabla^2\vec E-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec E}{\partial t^2}=\frac{1}{\epsilon_0}\vec\nabla\rho+\mu_0\frac{\partial\vec J}{\partial t}\\ \nabla^2\vec B-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec B}{\partial t^2}=-\mu_0\vec\nabla\times\vec J\end{array}\right.$$

Skalar-/Vektorpotential

$$\left.\begin{array}{r}\vec\nabla\cdot\vec B=0\ \Rightarrow\ \vec B=\vec\nabla\times\vec A\\ \vec\nabla\times\vec E+\frac{\partial\vec B}{\partial t}=\vec\nabla\times(\vec E+\frac{\partial\vec A}{\partial t})=0\ \Rightarrow\ \vec E=-\vec\nabla\Phi-\frac{\partial\vec A}{\partial t}\end{array}\right\}\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}\nabla^2\Phi+\frac{\partial}{\partial t}(\vec\nabla\cdot\vec A)=-\frac{\rho}{\epsilon_0}\\ \nabla^2\vec A-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec A}{\partial t^2}-\vec\nabla\left[\vec\nabla\cdot\vec A+\frac{1}{c^2}\frac{\partial\Phi}{\partial t}\right]=-\mu_0\vec J\end{array}\right.$$

Eichtransformation: $\vec A\mapsto\vec A+\vec\nabla\Lambda;\quad \Phi\mapsto\Phi-\frac{\partial\Lambda}{\partial t}$

Lorenz-Eichung: $\vec\nabla\cdot\vec A+\frac{1}{c^2}\frac{\partial\Phi}{\partial t}=0$ $\Rightarrow$ $\left\{\begin{array}{l}\nabla^2\Phi-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2}=-\frac{\rho}{\epsilon_0}\\ \nabla^2\vec A-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec A}{\partial t^2}=-\mu_0\vec J\end{array}\right.$

Coulomb-Eichung (transversale Eichung): $\vec\nabla\cdot\vec A=0$ $\Rightarrow$ $\left\{\begin{array}{l}\nabla^2\Phi=-\frac{\rho}{\epsilon_0}\\ \nabla^2\vec A-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec A}{\partial t^2}=-\mu_0\vec J_t\end{array}\right.$

(wobei $\vec J=:\vec J_l+\vec J_t$ mit $\vec\nabla\times\vec J_l=0$ und $\vec\nabla\cdot\vec J_t=0$)

elektro-magnetische-Wellen ($\rightarrow$ Lorenz-Eichung)

Lösung der homogenen Wellengleichung ($\rho=0$): $\Phi_{hom}=\Re e\int_{\vec k\in\mathbb{R}^3}\underbrace{c(\vec k)}_{\in\mathbb{C}}e^{i(\vec k\cdot\vec x-\omega t)}d^3k$

partikuläre Lösung der inhomogenen Wellengleichung (retardierte Potentiale): $\Phi_{ret}=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_{\vec x'\in\mathbb{R}^3}\frac{\rho(\vec x',\,t-\frac{1}{c}|\vec x-\vec x'|)}{|\vec x-\vec x'|}dV'$

(Die Green'sche Funktion des Operators ∇^2+k^2 ist $G(\vec x,\vec x')=\frac{e^{\pm ik|\vec x-\vec x'|}}{|\vec x-\vec x'|}$, sie beschreibt eine Kugelwelle.)

ebene Wellen: ($\rho=0,\vec J=0\ \rightarrow$ Coulomb-Eichung) $\Rightarrow\ \Phi=0;\ \vec A(z,t)=\begin{pmatrix}f_1(z-ct)+g_1(z+ct)\\ f_2(z-ct)+g_2(z+ct)\\ 0\end{pmatrix}$ (transversale Welle)

monochromatische Welle: $\vec A(\vec x,t)=\Re e\ \vec A_0\ e^{i(\vec k\cdot\vec x-\omega t)}\ \Rightarrow\ \vec E=-\frac{\partial\vec A}{\partial t}=\Re e\ \vec E_0\ e^{i(\vec k\cdot\vec x-\omega t)},\ \ \vec B=\vec\nabla\times\vec A=\Re e\ \vec B_0\ e^{i(\vec k\cdot\vec x-\omega t)}$

mit $\vec E_0=i\,c\,k\,\vec A_0,\ \ \vec B_0=i\,\vec k\times\vec A_0\ \Rightarrow\ c\,\vec B=\hat k\times\vec E$

Energie	und	Impuls
Energiedichte: $u_{\text{Feld}}=\frac{\epsilon_0}{2}E^2+\frac{1}{2\mu_0}B^2$		Impulsdichte: $g_{\text{Feld}}=\frac{\vec S}{c^2}$
$\frac{\partial u_{\text{Mat.}}}{\partial t}=\vec J\cdot\vec E$		$\frac{dg_{\text{Mat.}}}{dt}=\rho\vec E+\vec J\times\vec B$
Poynting-Vektor: $\vec S=\vec E\times\vec H$		Maxwell'scher Spannungstensor: $T_{ij}=\epsilon_0(E_iE_j-\frac{\delta_{ij}}{2}E^2)+\frac{1}{\mu_0}(B_iB_j-\frac{\delta_{ij}}{2}B^2)$
$\frac{d}{dt}(u_{\text{Mat.}}+u_{\text{Feld}})=-\vec\nabla\cdot\vec S$		$\frac{d}{dt}(\vec P_{\text{Mat.}}+\vec P_{\text{Feld}})_i=\oint_S\sum_{j=1}^3T_{ij}n_jdA$

Felder beschleunigter Ladungen (Betrachtung der Fourier-Komponenten: $f(\vec x,t)=f(\vec x)e^{-i\omega t}$ für $f=\rho,\vec J,\ \Phi,\vec A,\ \vec E,\vec B$.)

in Lorenz-Eichung: $\vec A(\vec x,t)=\frac{\mu_0}{4\pi}\int_V\frac{\vec J(\vec x',t-\frac{1}{c}|\vec x-\vec x'|)}{|\vec x-\vec x'|}dV'\ \Rightarrow\ \vec B=\vec\nabla\times\vec A\approx i\,k\,\hat n\times\vec A;\quad \vec\nabla\times\vec H=\frac{\partial\vec D}{\partial t}\ \Rightarrow\ \vec E=\frac{ic}{k}\vec\nabla\times\vec B\approx c\,\vec B\times\hat n$

$\vec A(\vec x)=\frac{\mu_0}{4\pi}\int_V\vec J(\vec x')\frac{e^{ik|\vec x-\vec x'|}}{|\vec x-\vec x'|}dV'\approx\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{e^{ikr}}{r}\int_V\vec J(\vec x')\,e^{-ik\hat n\cdot\vec x'}dV'$ (in der Fernzone: $kr\gg1;r\gg d\ \Rightarrow\ |\vec x-\vec x'|\approx r-\hat n\cdot\vec x'\approx r$)

elektrische Dipolstrahlung: $\vec A_{E1}(\vec x)=\frac{-i\mu_0\omega}{4\pi}\ \frac{e^{ikr}}{r}\ \vec p\ \Rightarrow\ \vec B_{E1}(\vec x,t)=\frac{\mu_0\omega^2}{4\pi c}\ \frac{e^{i(kr-\omega t)}}{r}\ (\hat n\times\vec p);\ \ \vec E_{E1}(\vec x,t)=c\,\vec B_{E1}(\vec x,t)\times\hat n$

$\frac{dP}{d\Omega}=r^2\ \langle\vec S\rangle\cdot\hat n=\frac{\mu_0\ \omega^4}{32\pi^2c}\underbrace{|(\hat n\times\vec p)\times\hat n|^2}_{=|\vec p|^2\sin^2\theta}$ (falls alle Komponenten von $\vec p$ gleichphasig sind)

Gesamtleistung: $\int\frac{dP}{d\Omega}d\Omega=\frac{\mu_0\ \omega^4}{12\pi c}\ |\vec p|^2$.

magnetische Dipolstrahlung: $\vec A_{M1}=\frac{i}{k}\ \vec B_{E1}$, wenn $\vec p$ durch $\frac{\vec m}{c}$ ersetzt wird. $\Rightarrow\ \vec B_{M1}=\frac{1}{c}\vec E_{E1};\ \ \vec E_{M1}=-c\vec B_{E1}$

elektrische Quadrupolstrahlung: $\vec A_{E2}=\frac{-\mu_0\omega^2}{8\pi c}\ \frac{e^{ikr}}{r}\ \int_V\rho(\vec x')(\hat n\cdot\vec x')\vec x'dV'$

$\Rightarrow\ \vec B_{E2}=i\ k\ \hat n\times\vec A=\frac{-i\mu_0\omega^3}{24\pi c^2}\ \frac{e^{ikr}}{r}\ \hat n\times\vec Q(\hat n)$ mit dem el. Quadrupoltensor $Q_{ij}=\int_V\rho(\vec x')(3x'_ix'_j-\delta_{ij}r^2)dV'$; $\quad\vec E_{E2}=c\,\vec B_{E2}\times\hat n$

Ist $Q=$diag$(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},1)Q_0$, so folgt $\frac{dP}{d\Omega}=\frac{\mu_0{Q_0}^2\ \omega^6}{512\pi^2c^3}\ \sin^2\theta\ \cos^2\theta$.

Lorentz-Invarianz der Maxwell-Gleichungen, relativistische Effekte

relativistische Notation, Tensoren

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = g^{\mu\nu} (\Rightarrow\ g_{\alpha\mu} g^{\mu\beta} = \delta_{\alpha\beta}); \qquad A_\mu = g_{\mu\nu} A^\nu; \quad A^\mu = g^{\mu\nu} A_\nu; \qquad ds^2 = dx_\mu \, dx^\mu = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$$

$$(x^\mu) = (ct,\, x,\, y,\, z); \quad (x_\mu) = (ct, -x, -y, -z) \qquad (\partial_\mu) \equiv (\tfrac{\partial}{\partial x^\mu}) = (\tfrac{1}{c}\tfrac{\partial}{\partial t}, \vec{\nabla}); \quad (\partial^\mu) \equiv (\tfrac{\partial}{\partial x_\mu}) = (\tfrac{1}{c}\tfrac{\partial}{\partial t}, -\vec{\nabla}) \qquad \Box \equiv \partial_\mu \partial^\mu = \tfrac{1}{c^2}\tfrac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2$$

Lorentz-Transformation: $ds'^2 = ds^2 \ \Rightarrow\ x' = \Lambda\, x \big(+ b \big)$ mit $\Lambda^T g\, \Lambda = g$ $(\Rightarrow\ \det \Lambda = \pm 1)$

Boost in x-Richtung: $t' = \gamma(t - \frac{vx}{c^2})$; $x' = \gamma(x - vt)$; $y' = y$; $z' = z$; mit $\beta = \frac{v}{c}$, $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$:

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

kovariante Formulierung der Elektrodynamik (in cgs-Einheiten)

$(J^\mu) = (c\rho, \vec{J}) \ \Rightarrow$ Kontinuitätsgleichung: $\partial_\mu J^\mu = 0$

$(A^\mu) = (\Phi, \vec{A}) \ \Rightarrow$ Wellengleichung: $\Box A^\mu = \frac{4\pi}{c} J^\mu$ mit der Lorenz-Bedingung $\partial_\mu A^\mu = 0$

elektromagnetischer Feldstärketensor $(F^{\mu\nu}) = (\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu)$, kovariante Form $(F_{\mu\nu}) = (g_{\mu\alpha} F^{\alpha\beta} g_{\beta\nu})$ und dualer Feldstärketensor $(\widetilde{F}^{\mu\nu})$:

$$(F^{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -B_z & B_y \\ E_y & B_z & 0 & -B_x \\ E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}, \qquad (F_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & -B_z & B_y \\ -E_y & B_z & 0 & -B_x \\ -E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad (\widetilde{F}^{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 0 & -B_x & -B_y & -B_z \\ B_x & 0 & E_z & -E_y \\ B_y & -E_z & 0 & E_x \\ B_z & E_y & -E_x & 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ Maxwell-Gleichungen: $\boldsymbol{\partial_\mu F^{\mu\nu} = \frac{4\pi}{c} J^\nu, \qquad \partial_\mu \widetilde{F}^{\mu\nu} = 0}$

Transformation der Felder: $\vec{E}' = \gamma(\vec{E} + \vec{\beta} \times \vec{B}) - \frac{\gamma^2}{\gamma+1}(\vec{\beta} \cdot \vec{E})\, \vec{\beta}$; $\qquad \vec{B}' = \gamma(\vec{B} - \vec{\beta} \times \vec{E}) - \frac{\gamma^2}{\gamma+1}(\vec{\beta} \cdot \vec{B})\, \vec{\beta}$

Energie-Impuls-Tensor: $\Theta^{\mu\nu} = \frac{1}{4\pi} g^{\mu\alpha} F_{\alpha\beta} F^{\beta\nu} + \frac{1}{16\pi} g^{\mu\nu} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta}$

$\Rightarrow\ \Theta^{ij} = -T_{ij} = -\frac{1}{4\pi}\Big(E_i E_j + B_i B_j - \frac{\delta_{ij}}{2}(E^2 + B^2) \Big)$; $\qquad \Theta^{00} = \frac{1}{8\pi}(E^2 + B^2)$; $\qquad \Theta^{0i} = \Theta^{i\,0} = (\vec{E} \times \vec{B})^i$

Invarianten des elektromagnetischen Feldes: $F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} = 2(B^2 - E^2)$; $\qquad F_{\alpha\beta} \widetilde{F}^{\alpha\beta} = -4\, \vec{E} \cdot \vec{B}$