

Aufgaben der Klausur "Analysis für Physiker III"

1) Welche der folgenden Funktionen f sind analytische Funktionen auf ganz \mathbf{C} ? Welche sind sogar auf ganz \mathbf{C} lokal konform?

a) $f(z) = \frac{1}{z+z^2}$

b) $f(z) = e^{z+i}$

c) $f(z) = x + y$ wobei $z = x + iy$

d) $f(z) = z^2 + 2$

(2 P)

2) Bestimmen Sie eine Laurent-Reihe, welche die Funktion $z \cos\left(\frac{1}{z}\right) + \frac{1}{z-z^2}$ in der Nähe des Nullpunktes darstellt. Geben Sie Residuum und Konvergenzbereich der Reihe an. (4 P)

3) Berechnen Sie folgende Integrale mit den Cauchyschen Integralformeln.

i) $\int_{|z|=2} \frac{\cos(z)}{z-(\pi/2)} dz$

ii) $\int_{|z-1|=1} \left(\frac{z}{z-1}\right)^2 dz$

(4 P)

4) Mittels Residuenkalkül berechne man

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin(x)}{x^2 + 1} dx$$

(4 P)

5) Finden Sie für das System von Differentialgleichungen

$$\dot{x} = -x^3 - (1 + xy)e^{xy}; \quad \dot{y} = y^2 e^{xy} + 3x^2 y$$

ein 1. Integral F mit $F(0, 0) = 0$.

(4 P)

6) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$y''' - y' = x - 1.$$

(4 P)

7) Bestimmen Sie die Lösung des Randwertproblems

$$y'' - y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y(1) = 2.$$

(4 P)

8) Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Geben Sie zu den falschen Aussagen ein Gegenbeispiel.

a) Aus den Flussaxiomen folgt für jeden Fluss Φ die Gleichung $\Phi(t, \Phi(-t, x)) = x$.

b) Jede homogene Randwertaufgabe hat mindestens eine nichttriviale (d.h. von 0 verschiedene) Lösung.

c) Sei γ ein beliebiger geschlossener Weg in \mathbf{C} , der nicht durch z_0 geht. Dann ist $\int_{\gamma} \frac{i}{\pi(z-z_0)} dz$ eine ganze Zahl.

(2 P)