Institut für Theoretische Physik
Prof. Dr. Klaus Richter

WS 2002/2003

Übungen zur Theoretischen Physik I (Mechanik) Blatt 0

Dr. Heribert Weigert (Raum 4.1.15, Tel. 943-2014)

---

1 Kreuzprodukte und ϵ-Tensor

Der total antisymmetrische Tensor dritter Stufe ϵ_{ijk} sei definiert durch

$$\epsilon_{ijk} := \boldsymbol{e}_i \cdot (\boldsymbol{e}_j \times \boldsymbol{e}_k) = \begin{cases} 1 & i,j,k \text{ zyklisch zu } 1,2,3 \\ -1 & i,j,k \text{ antizyklisch zu } 1,2,3 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Im Folgenden benutzen wir die Summenkonvention, d.h. in einem *Produkt* zweier Tensoren M und N wird über zweimal auftretende *Indices* summiert. Der Ausdruck

$$M_{\dots i \dots} N_{\dots i \dots}$$

meint also explizit

$$\sum_i M_{\dots i \dots} N_{\dots i \dots}$$

Dies ist selbstverständlich nur dort sinnvoll wo der Bereich der Summation aus der Definition der Tensoren eindeutig vorgegeben ist.

1. Zeigen Sie, dass gilt:

$$\begin{aligned} \epsilon_{ijk}\epsilon_{lmk} &= \delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl} \\ \epsilon_{imk}\epsilon_{lmk} &= 2\delta_{il} \\ \epsilon_{lmk}\epsilon_{lmk} &= 6 \end{aligned}$$

   Anmerkung: Wo tritt in den einzelnen Zeilen die Summenkonvention auf?

2. Man beweise *unter Verwendung* des ϵ-Tensors und der obigen Resultate die Identitäten

$$\begin{aligned} \boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) &= \boldsymbol{b}(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c}) - \boldsymbol{c}(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}) \\ (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot (\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{d}) &= \boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{b} \times (\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{d})) \\ &= (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c})(\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{d}) - (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{d})(\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{c}) \\ (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \times (\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{d}) &= \boldsymbol{c}((\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{d}) - \boldsymbol{d}((\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{c}) \\ &= \boldsymbol{b}((\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{d}) \cdot \boldsymbol{a}) - \boldsymbol{a}((\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{d}) \cdot \boldsymbol{b}) \end{aligned}$$

2 Vektoranalysis

1. $\boldsymbol{r} = (r_1, r_2, r_3)$ sei ein Ortsvektor mit $r = |\boldsymbol{r}|$, $f(r)$ eine skalare Funktion von r und $\boldsymbol{B}$ ein konstanter Vektor.

   Berechnen Sie $\mathrm{grad} f(r)$, $\mathrm{grad} r^n$, $\mathrm{div}(r^n \boldsymbol{r})$ und $\mathrm{rot}(f(r)\boldsymbol{r})$

2. Eine elektrische Punktladung habe das Potential $\phi(r) = q r^{-(1+\epsilon)}$ mit $|\epsilon| \ll 1$ und $q = \mathrm{const}$.

   (a) $\boldsymbol{E} = -\mathrm{grad}\phi$

   (b) $\mathrm{div}\boldsymbol{E}$

   (c) $(\mathrm{rot}\boldsymbol{E})_i = \epsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial r_j} E_k$

   (d) Diskutieren Sie den Limes $\epsilon \to 0$.

Institut für Theoretische Physik
Prof. Dr. Klaus Richter

WS 2002/2003

Übungen zur Theoretischen Physik I (Mechanik) Blatt 1

Dr. Heribert Weigert (Raum 4.1.15, Tel. 943-2014)

---

1 Bewegung im zweidimensionalen Raum schriftl. 5 Punkte

Ein Teilchen bewege sich in der x_1—x_2–Ebene. Der Ortsvektor sei gegeben als

$$\boldsymbol{r} = a\cos(\omega t)\,\boldsymbol{e}_1 + b\sin(\omega t)\,\boldsymbol{e}_2$$

mit konstantem ω und b.

1. Welche geometrische Figur wird durch die Bahnkurve beschrieben?
2. Wie stehen Geschwindigkeit $\boldsymbol{v}(t)$ und Bahnkurve $\boldsymbol{r}(t)$ zueinander?
3. Wohin ist die Beschleunigung $\boldsymbol{a}$ gerichtet? Berechnen Sie den Betrag von $\boldsymbol{a}$.
4. Zeigen Sie, dass $\boldsymbol{L} = \boldsymbol{r} \times m\boldsymbol{v}$ ein konstanter Vektor ist. Berechnen Sie den Betrag von $\boldsymbol{L}$.

2 Gradienten verschiedener Potentiale schriftl. 5 Punkte

Bestimmen Sie die Gradienten der folgenden Potentiale ($L, c, m, \boldsymbol{a}, \alpha, \beta, \gamma$ sind Konstanten)

1. $V(\boldsymbol{r}) = L^2/(2mr^2)$
2. $V(\boldsymbol{r}) = c \cdot e^{-\gamma r^2}$
3. $V(\boldsymbol{r}) = (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{r})^n$
4. $V(\boldsymbol{r}) = a(x^2 + y^2) + \beta xy$

3 Beispiel einer konservativen Kraft mündl.

1. Man zeige, dass die Kraft $\boldsymbol{F} = -\eta r^2 \boldsymbol{r}$ konservativ ist.
2. Man berechne das zugehörige Potential.
3. Wie groß ist die Gesamtenergie eines Massenpunktes in diesem Feld?

Institut für Theoretische Physik SS 2004
Prof. Dr. Klaus Richter

Übungen zur Theoretischen Physik I (Mechanik) Blatt 2

Dr. Heribert Weigert (Raum 4.1.15, Tel. 943-2014)

Aufgabe 1 Freier Fall im rotierenden Bezugssystem **schriftl. 5 Punkte**

Sei S' ein Bezugssystem, das mit konstanter Winkelgeschwindingkeit ω um die z-Achse rotiert ($z = z'$). Die Beschleunigung durch die Scheinkräfte im rotierenden System ist gegeben durch

$$\ddot{\boldsymbol{r}} = -2\boldsymbol{\omega} \times \dot{\boldsymbol{r}} - \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r})$$

Wir betrachten die Bahn $\boldsymbol{r}'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t))$ eines frei fallenden Körpers mit Masse m in einem rotierenden Bezugssystem mit konstanter Drehgeschwindingkeit $\boldsymbol{\omega}$. Zusätzlich wirke eine Fallbeschleunigung $-g$ parallel zur Rotationsachse. Als Anfangsbedingungen wählen wir $x'(0) = x_0$, $y'(0) = 0$, $z'(0) = h$ und $\dot{\boldsymbol{r}}(0) = \boldsymbol{0}$. Zeigen Sie, dass die Bahn eine Spirale darstellt

$$x'(t) = x_0(\cos\omega t + \omega t \sin\omega t); \qquad y'(t) = -x_0(\sin\omega t - \omega t \cos\omega t)$$

Aufgabe 2 Corioliskraft auf Fluß **mündl.**

Ein Fluß der Breite $D = 50\text{m}$ fließt in $\lambda = 50°$ nördlicher Breite mit einer Strömungsgeschwindigkeit $v_0 = 2.5\frac{\text{m}}{\text{s}}$ nach Norden. Wie groß ist der Niveauunterschied zwischen dem Wasserstand am linken und rechten Ufer?

Aufgabe 3 Heteropolares Molekül in klassischer Näherung **schriftl. 1.-2., 5 Punkte**

Zwischen den beiden Ionen eines heteropolaren Moleküls wirkt eine Kraft der Form

$$\boldsymbol{F} = \Big(-\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{e_0^2}{r^3} + \frac{c}{r^{11}} \Big)\boldsymbol{r}$$

1. Bestimmen sie c als Funktion der Gleichgewichtsauslenkung r_0.
2. Welche Arbeit ist nötig um das Molekül zu trennen? (Dissoziationsenergie).
3. Mit welcher Frequenz schwingt das Molekül, wenn es in radialer Richtung angestoßen wird? Berechnen Sie dazu
   (a) das Potential und geben Sie die Näherung für kleine Auslenkungen an. Skizzieren Sie das Potential.
   (b) $r(t)$ im Fall kleiner Auslenkungen.
   Hinweis: Eindimensionale Bewegung! Es empfiehlt sich, zunächst $t(r)$ zu berechnen und dann zu invertieren. Drücken Sie dabei die Gesamtenergie des Systems durch die kinetische Energie in der Gleichgewichtsposition $E = \frac{m}{2}v_0^2$ aus.
   (c) Lesen Sie aus $r(t)$ Amplitude und Kreisrequenz ab.

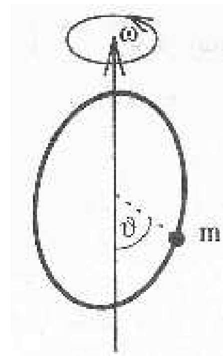
Anmerkung: Die Integralformel $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a}$ könnte nützlich sein.
Zahlenwerte für das H^+Cl^--Molekül: Gleichgewichtsabstand $r_0 = 1.27\text{Å}$, Elementarladung $e_0 = 1.602 \cdot 10^{-19}\text{C}$, Masse des Protons $m_0 = 1.673 \cdot 10^{-27}\text{kg}$.

Institut für Theoretische Physik SS 2004
Prof. Dr. Klaus Richter

Übungen zur Theoretischen Physik I (Mechanik) Blatt 3

Dr. Heribert Weigert (Raum 4.1.15, Tel. 943-2014)

Aufgabe 1 Bewegung auf einem rotierenden Drahtring **1& 2 schriftl.**



Eine Perle der Masse m bewege sich reibungsfrei auf einem Drahtring mir Radius R, der mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω um eine Achse in der Ringebene rotiere. Die Richtung der Drehachse stimme mit derjenigen des als konstant angenommenen Schwerefelds überein.

1. Leiten Sie die Gleichung
$$\ddot{\vartheta} = \Big(-\frac{g}{R} + \omega^2 \cos\vartheta \Big) \sin\vartheta$$
durch den Lagrangeformalismus zweiter Art her. Dabei bietet es sich an Kugelkoordinaten zu verwenden. Um ϑ als den Winkel zur z-Achse mit den üblichen Konventionen der Kugelkoordinaten zu identifizieren stellen wir das Koordinatensystem auf den Kopf damit insbesondere z nach unten zeigt. Eliminieren Sie unter Benutzung der Zwangsbedingungen die Koordinaten r und ϕ. Die resultierende Lagrangefunktion zweiter Art enthält dann nur noch ϑ und ist frei von Zwangsbedingungen.

4 Punkte

2. Diskutieren Sie die möglichen Gleichgewichtslagen der Perle und deren Stabilität in Abhängigkeit von der Winkelgeschwindigkeit ω. Dazu spalten Sie $L(\vartheta, \dot{\vartheta})$ auf in $T(\dot{\vartheta}) - V(\vartheta)$. Fertigen Sie Skizzen des Potentials $V(\vartheta)$ für die Fälle in denen stabile Konfigurationen auftreten an. Skizzieren Sie $\theta_{\min}$ als Funktion von $\nu = \omega/\sqrt{r/R}$.

8 Punkte

3. Entwickeln Sie die Bewegungsgleichung für Schwingungen mit kleiner Amplitude um die stabile Gleichgewichtslage in harmonischer Näherung.

   Lösen Sie die genäherte Gleichung für beliebige Anfangsbedingungen. Interpretieren Sie die Lösungen.

4. Zeigen Sie, dass die Energie
$$E = \frac{1}{2} m R^2 \dot{\vartheta}^2 + V(\vartheta) \tag{1}$$
konstant, also erhalten ist.

   Entwickeln Sie die potentielle Energie $V(\vartheta)$ um $\theta = 0$ bis zu Termen 4.ter Ordnung.

   Diskutieren Sie die ω-Abhängigkeit des genäherten Potentials und erklären Sie damit das Zustandekommen der verschiedenen Gleichgewichtslagen.

Aufgabe 2 Beladung eines bewegten Waggons **mündl.**

Ein zunächst leerer Waggon der Masse M_0 bewegt sich reibunglos mit der Geschwindigkeit V_0 auf einem Schienenstrang. Bei $t = 0$ und $x = 0$ wird begonnen den sich weiterbewegenden Waggon mit der Füllrate λ[kg/sec] mit Sand zu beladen. Bestimmen Sie die Position des Waggons als Funktion der Zeit.

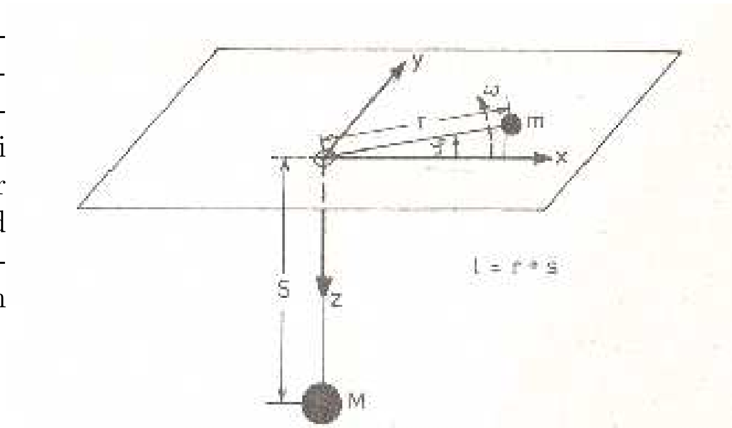
Institut für Theoretische Physik SS 2004
Prof. Dr. Klaus Richter

Übungen zur Theoretischen Physik I (Mechanik) Blatt 4

Dr. Heribert Weigert (Raum 4.1.15, Tel. 943-2014)

Aufgabe 1 Verbundenes Massenpaar **schriftl., 8 Punkte**

Eine Masse m bewege sich reibungslos in der horizontalen Ebene im Abstand r zum Koordinatenursprung. Eine Masse M sei mit ihr durch einen Faden der Länge $l = r + s$ verbunden und hängt, über eine Rolle am Koordinatenursprung geführt, frei im Schwerefeld der Erde.



1. Stellen Sie die Lagrangefunktion und die Bewegungsgleichungen für das System in den Koordinaten s und φ auf.

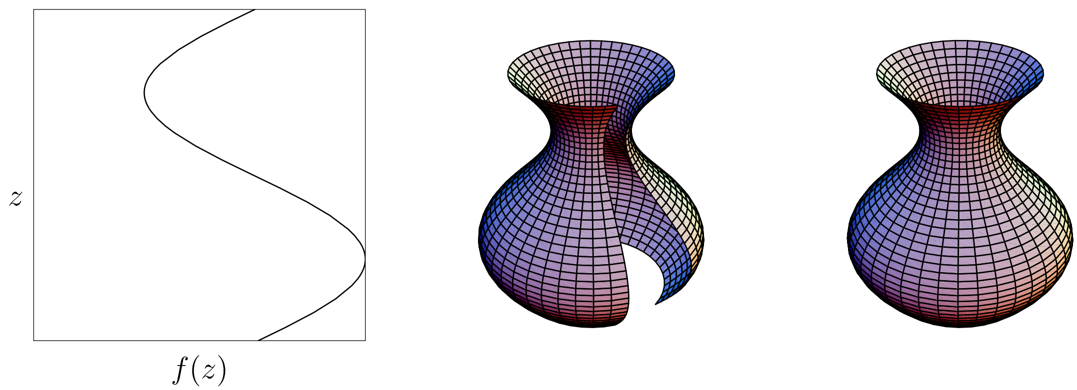
2. Gibt es zyklische Koordinaten? Gilt der Energiesatz? (Prüfen Sie letzteres durch direkte Integration der Bewegungsgleichung in s.)

3. Bestimmen Sie die Gleichgewichtslage und das effektive Potential. Parametrisieren Sie letzteres durch die Gleichgewichtslage. Welche Beschränkungen müssen für die Erhaltungsgrößen gefordert werden, damit die Anordnung wie beschrieben erhalten bleibt?

   Skizzieren Sie das effektive Potential im erlaubten Bereich. Wie bewegt sich das System dort qualitativ? Was geschieht, wenn die Erhaltungsgrößen außerhalb dieses Bereichs liegen?

Aufgabe 2 Teilchen auf Rotationskörper **Teil 1 schriftl., 2 Punkte**

Ein Teilchen der Masse m bewege sich unter dem Einfluss der Schwerkraft (g bezeichne die Gravitationskonstante) auf einem Rotationskörper, der von der Funktion $f(z)$ erzeugt wird wie hier für ein Beispiel graphisch dargestellt:



1. Geben Sie die Lagrangefunktion in den verallgemeinerten Koordinaten z und φ an.

2. Berechnen Sie die Euler-Lagrange-Gleichungen. Was sind die Erhaltungsgrößen des Systems?

3. Untersuchen Sie den Fall $\rho = f(z) = cz^{1/2}$ für positive z. Welche Form hat der Rotationskörper? (Skizze). Stellen Sie die Lagrangefunktion als Funktion der verallgemeinerten Koordinaten ρ und φ auf. Warum ist dies möglich? Wodurch unterscheidet sich das System von einem harmonischen Oszillator in der x-y-Ebene? Geben Sie für $\dot{\varphi}(0) = 0$ die allgemeine Lösung für ρ im Grenzfall $c \to \infty$ mit $\tilde{g} = g/c^2 = \text{const.}$ an.

Abgabe der schriftlichen Aufgabenteile bis Montag **24.05.04**, 10^{ct}

Klausurtermine:
1. Klausur Fr, 11.06. 2004, 14^{st}
2. Klausur Fr, 09.07. 2004, 14^{st}

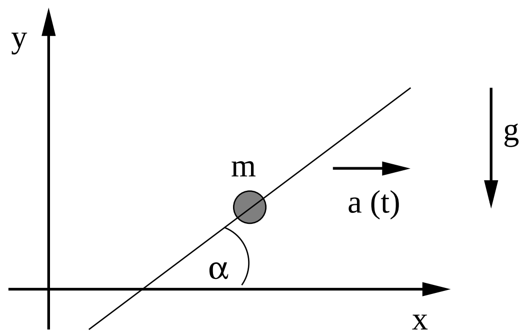
Institut für Theoretische Physik
Prof. Dr. Klaus Richter SS 2004

Übungen zur Theoretischen Physik I (Mechanik) Blatt 5

Stefan Gottwald (Raum 3.1.20, Tel. 943-2044)

Aufgabe 1 Perle auf beschleunigtem Draht **schriftl., 8 Punkte**

Ein Draht, der um einen Winkel α gegen die x-Achse geneigt ist, wird in die x-Richtung zeitabhängig beschleunigt (Beschleunigung $a = \gamma t$, zum Zeitpunkt $t = 0$ sei der Draht in Ruhe). Auf ihm gleitet reibungsfrei eine Perle der Masse m im Schwerefeld der Erde.



1. Formulieren Sie die Zwangsbedingung.
2. Leiten Sie mit dem Lagrange-Formalismus 1. Art die beiden Bewegungsgleichungen ab.
3. Eliminieren Sie den Lagrange-Multiplikator und nutzen Sie die Zwangsbedingung aus, um *eine* Bewegungsgleichung (für y) zu bekommen.
4. Bestimmen Sie die Zwangskraft $\mathbf{F}^{(c)}$. Wie steht diese relativ zum Draht?
5. Lösen Sie die Bewegungsgleichung und geben Sie $y(t)$ und $x(t)$ an, für $y(0) = y_0$ und $\dot{y}(0) = 0$.

Aufgabe 2 Fermat´sches Prinzip

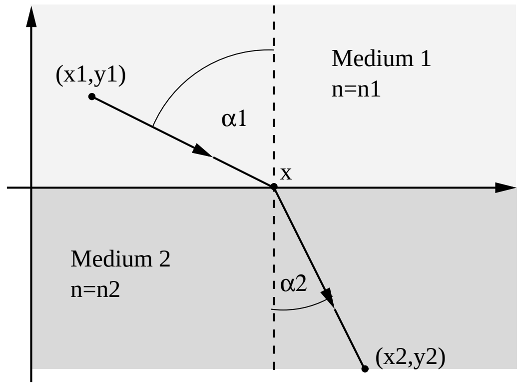
Für die geometrische Optik hat Fermat 1679 einen sehr allgemeinen Satz aufgestellt: Bezeichnet man das Produkt aus dem Brechungsindex n und dem infinitesimalen Längenelement ds als infinitesimale optische Weglänge (Lichtweg l_{opt}), so lautet das Fermat´sche Prinzip:

$$l_{\text{opt}} = \int_1^2 n ds = \text{Extremum}, \tag{1}$$

d.h. die optische Länge eines Strahles zwischen zwei festen Punkten besitzt einen Extremwert. Aus dem Fermat´schen Prinzip lassen sich die Reflexions- und Brechungsgesetze ableiten, d.h. in ihm ist die gesamte geometrische Optik enthalten.

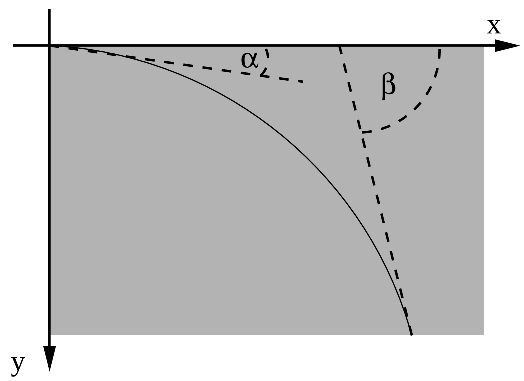
1. Zeigen Sie mit Hilfe des Fermat´schen Prinzips, daß sich Licht in einem Medium mit konstantem Brechungsindex n_0 längs einer Geraden ausbreitet. Vergleichen Sie die auftretenden Größen mit den im Lagrange-Formalismus verwendeten.

2. Leiten Sie das Brechungsgesetz her, indem Sie x (siehe Skizze) variieren.



3. Ein Lichtstrahl durchlaufe ein inhomogenes Medium (z.B. eine gesättigte Kochsalzlösung). Leiten Sie mittels des Fermat´schen Prinzips die Differentialgleichung für die Ausbreitung des Lichtstrahls im Medium her, wenn der Brechungsindex von y abhängt, d.h. $n = n(y)$.

4. Betrachten Sie nun einen Lichtstrahl in einem Medium, dessen Brechungsindex gegeben ist durch $n(y) = n_0 e^{cy}$. Gesucht ist der Winkel $\beta(x)$, wenn der Strahl unter dem Winkel α bei $x = 0$ einfällt (siehe Skizze).

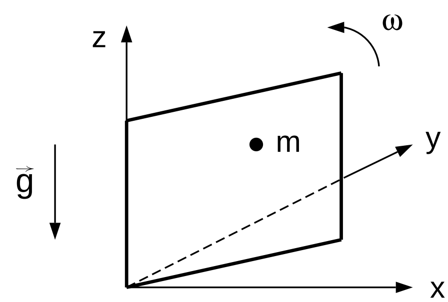


Abgabe des schriftl. Aufgabenteils bis Mittwoch 02.06.2004 09.00 Uhr

Übungen zur Theoretischen Physik I (Mechanik) Blatt 6

Aufgabe 1 Massenpunkt in rotierender Ebene **schriftl., 4 Punkte**

Eine Masse m bewege sich im Schwerefeld der Erde reibungslos in einer vertikalen Ebene. Die Ebene enthalte die z-Achse und rotiere mit fester Winkelgeschwindigkeit ω um diese Achse.



1. Stellen Sie die Lagrangefunktion und die Bewegungsgleichungen für das System in den Koordinaten ρ und z auf.
2. Lösen Sie die Bewegungsgleichungen mit den Anfangsbedingungen $z(0) = \dot{z}(0) = 0$, $\rho(0) = a$, $\dot{\rho}(0) = 0$. (Tipp: Beim Lösen durch direkte Integration bietet sich als Substitution $\rho = a \cosh u$ an.)
3. Berechnen Sie die Gesamtenergie. Ist sie erhalten?
4. Geben Sie die Erhaltungsgröße des Systems an. (Was ist ihre Dimension?)

Aufgabe 2 Lenz'scher Vektor **schriftl., 6 Punkte**

Für spezielle Potentiale können zusätzliche Erhaltungsgrößen existieren, die nicht mit einer räumlichen Symmetrie des Problems verknüpft sind. Für das Coulomb-Potential $V(r) = -\alpha/r$ tritt dieser Fall ein. (Die "versteckte" Symmetrie ist hier dynamisch, vgl. Elliott & Dawber, Symmetry in Physics, vol. 2 sect. 19.4 (Macmillan 1979).) Die zugehörige Erhaltungsgröße ist der Lenz'sche Vektor

$$\boldsymbol{\Lambda} = \frac{\boldsymbol{p} \times \boldsymbol{L}}{m\alpha} - \frac{\boldsymbol{r}}{r}$$

1. Zeigen Sie unter Verwendung der Bewegungsgleichung, dass dieser Vektor wirklich erhalten ist. Was geschieht für Potentiale der Form $1/r^n$ mit $n \neq 1$?
2. Untersuchen Sie $\boldsymbol{\Lambda} \cdot \boldsymbol{r}$. Geben sie eine anschauliche Interpretation für $\boldsymbol{\Lambda}$.

Aufgabe 3 Zentralkraftproblem mit ungewöhnlichem Potential **mündl.**

Wir betrachten ein Zentralkraftproblem mit $V(r) = -\frac{\alpha}{r^6}$.

1. Skizzieren Sie das sich daraus ergebende effektive Potential und diskutieren Sie, welche Arten von Bahnen Sie für ein Teilchen in Abhängigkeit von seiner Energie erwarten.
2. Berechnen Sie die Bahnkurve $r(\varphi)$ für den Spezialfall $E = 0$ (Tipp: die Lösung ist eine sogenannte Lemniskate $(x^2 + y^2)^2 - 2a^2(x^2 - y^2) = 0.$) Die Bahnkurve wird sich aus stückweisen Lösungen der Form

$$\boldsymbol{r}(\varphi) = r(\varphi)(\cos(\varphi + n\frac{\pi}{2}), \sin(\varphi + n\frac{\pi}{2}))$$

mit ganzzahligem n und $\varphi \in [-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$ zusammensetzen. (Warum?). Diskutieren Sie den Durchlaufsinn durch aufeinanderfolgende Teilstücke. Skizze.

Institut für Theoretische Physik
Prof. Dr. Klaus Richter SS 2004

Übungen zur Theoretischen Physik I (Mechanik) Blatt 7

Dr. Heribert Weigert (Raum 4.1.15, Tel. 943-2014)

Aufgabe 1 Bewegung im r^{-2} Potential **schriftl., 6 Punkte**

Ein Massenpunkt der Masse m bewegt sich in einem Potential der Form $V(r) = \frac{\alpha}{r^2}$, mit $\alpha > 0$

1. Geben Sie die Erhaltungsgrößen an (ohne Herleitung). Welche Energien sind erlaubt? Warum gibt es nur Streulösungen?

2. Berechnen Sie $r(\varphi)$. Aus der Vorlesung:

$$\varphi(r) - \varphi(r_0) = \pm \frac{l}{m} \int_{r_0}^{r} \frac{dr' r'^{-2}}{\sqrt{\frac{2}{m}\left[E - V(r') - \frac{l^2}{2mr'^2}\right]}} \ .$$

   Wählen Sie dabei r_0 als den kleinstmöglichen Abstand r_{min}. (Wodurch ist der bestimmt?)

3. Bestimmen Sie den Zusammenhang zwischen Streuwinkel θ und Stoßparameter b. (Die Asymptoten der gestreuten Bahn ergeben sich aus den Polen von $r(\varphi)$. Welche der Erhaltungsgrößen ist durch den Stoßparameter bestimmt?)

4. Berechnen Sie mit Hilfe des allgemeinen Ausdrucks für $d\sigma/d\Omega$ den differentiellen Wirkungsquerschnitt.

Wegen der Klausur Abgabetermin erst am Mo, 21.06.2004, 10:00 Uhr

Institut für Theoretische Physik
Prof. Dr. Klaus Richter SS 2004

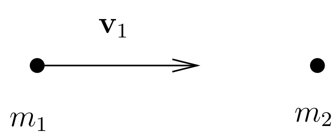
Übungen zur Theoretischen Physik I (Mechanik) Blatt 8

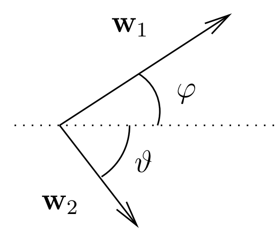
Dr. Heribert Weigert (Raum 4.1.15, Tel. 943-2014)

Aufgabe 1 Einfacher Stoß **schriftl., 4 Punkte**

Ein Teilchen der Masse m_1 und der Geschwindigkeit $\mathbf{v}_1$ stößt in einer Nebelkammer elastisch auf ein ruhendes Teilchen der Masse m_2. Die Spuren der Teilchen nach dem Stoß bilden mit der Richtung des stoßenden Teilchens die Winkel φ bzw. ϑ.

1. Berechnen Sie die Verhältnisse der Geschwindigkeiten $\mathbf{w}_1$ und $\mathbf{w}_2$ nach dem Stoß zu $\mathbf{v}_1$ in Abhängigkeit von φ und ϑ.
2. Zeigen Sie, wie man das Massenverhältnis m_2/m_1 allein mit Hilfe von φ und ϑ ermitteln kann.
3. Wie liegen die Spuren der Teilchen nach dem Stoß zueinander, wenn $m_1 = m_2$ ist?





Aufgabe 2 Foucault Pendel **schriftl., 6 Punkte**

Der klassische Beweis der Rotation der Erde wurde mit dem Foucault Pendel erbracht. Es besteht aus einer schweren Masse und einem langen Pendelfaden. Dies erlaubt es, jegliche Energieverluste durch Reibung auch über lange Zeiten zu vernachlässigen und ermöglicht es, in der Näherung kleiner Ausschläge zu arbeiten.
Berechnen Sie in dieser Näherung, wie die Erdrotation die Schwingungsebene des Pendels langsam dreht. Die geographische Breite, an der das Experiment stattfindet sei φ (gemessen vom Äquator) und $\boldsymbol{\omega}$ die Winkelgeschwindigkeit der Erdrotation. Wählen Sie x und y als generalisierte Koordinaten im erdfesten System.

1. Geben Sie die Lagrangefunktion im erdfesten System an. Vernachlässigen Sie dabei die kleinen Terme mit ω^2, z und $\dot{z}$.
2. Leiten Sie die Bewegungsgleichungen ab und parametrisieren Sie sie mit Hilfe von $\omega_0 = \sqrt{g/l}$, der Schwingungsfrequenz des Pendels ohne Berücksichtigung der Erdrotation und $\omega_z := \omega \sin\varphi$.
3. Transformieren Sie das Resultat in ein Koordinatensystem $\hat{x}$, $\hat{y}$, das mit der Geschwindigkeit ω_z relativ zum erdfesten System x, y rotiert: $x = \hat{x}\cos\omega_z t + \hat{y}\sin\omega_z t$, $y = -\hat{x}\sin\omega_z t + \hat{y}\cos\omega_z t$, und lösen Sie die entstehenden Gleichungen.
4. Interpretieren Sie das Resultat.

Abgabetermin Mo, 21.06.2004, 10:00 Uhr

Institut für Theoretische Physik
Prof. Dr. Klaus Richter SS 2004

Übungen zur Theoretischen Physik I (Mechanik) Blatt 9

Michael Wimmer (Raum 3.1.18, Tel. 943-2046)

Aufgabe 1 Trägheitsmoment einer inhomogenen Massenverteilung **schriftl., 2 Punkte**

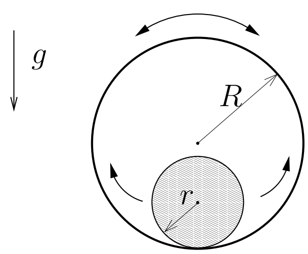
Berechnen Sie die Hauptträgheitsmomente für einen Stern der Masse M und des Radius R. Die sphärisch symmetrische Dichteverteilung des Sterns werde beschrieben durch

$$\rho(r) = \rho_0 \, (1 - r/R) \ .$$

Vergleichen sie das Ergebnis mit dem Trägheitsmoment eines homogenen Objekts von gleicher Masse und Radius.

Aufgabe 2 Rollende Zylinder **schriftl., 6 Punkte**

Ein rauher homogener Zylinder der Masse m und des Radius r rolle im Schwerefeld auf der Innenfläche eines dünnwandigen Hohlzylinders der Masse M und des Radius R, der sich um seine horizontale Achse drehen kann.
Berechnen Sie die Schwingungsdauer für kleine Amplituden.



Aufgabe 3 Beweis des Steiner'schen Satzes **mündl.**

Gegeben sei der Trägheitstensor Θ_{ij} eines starren Körpers in einem körperfesten Koordinatensystem (KS), dessen Ursprung gleich dem Schwerpunkt ist. Berechnen Sie den Trägheitstensor Θ'_{ij} für ein um den Vektor $\mathbf{a}$ verschobenes, körperfestes System KS$'$ (Achsen parallel zu KS).

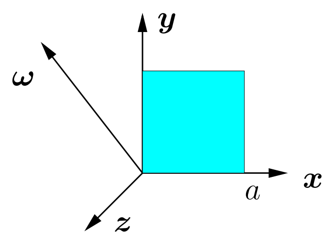
Abgabe des schriftl. Aufgabenteils bis Montag, 28.06.2004, 10.00 Uhr

Übungen zur Theoretischen Physik I (Mechanik) Blatt 10

Dr. Heribert Weigert (Raum 4.1.15, Tel. 943-2014)

Aufgabe 1 Rotation eines Massenquadrats **schriftl., 6 Punkte**

Untersuchen Sie die Rotation eines in der xy-Ebene liegenden massebelegten Quadrats der Massendichte ρ $[\mathrm{kg/m^2}]$ mit Winkelgeschwindigkeit $\boldsymbol{\omega}$ um einen der Eckpunkte des Quadrats mit Seitenlänge a.



1. Berechnen Sie den Trägheitstensor Θ
2. Bestimmen Sie die Hauptträgheitsmomente durch Hauptachsentransformation (Lösung des entsprechenden Eigenwertproblems).
3. Bestimmen Sie explizit die Lage der Hauptträgheitsachsen.
4. Bestimmen Sie die Matrix, die den Trägheitstensor diagonalisiert.

Aufgabe 2 Fourier-Transformationen **schriftl., 4 Punkte**

1. Berechne die Fourierreihen der folgenden Funktionen mit Periode $L = 10$ über dem Intervall $[-5, 5]$:
$$f(t) = t + 5 \qquad\qquad g(t) = |t|$$
2. Berechne die Fourierreihe der Funktion
$$f(t) = \begin{cases} -a & \text{für} \quad -\pi < t < 0 \\ a & \text{für} \quad 0 < t < \pi \end{cases}$$
mit Periode 2π.

Hinweis: Eine knappe Einführung zu Fourierreihen und Fouriertransformation findet sich in Kuypers, Klassische Mechanik (Kapitel über Schwingungen) oder Bronstein.

Aufgabe 3 Rollende Kegel **mündl.**

Man bestimme die kinetische Energie eines homogenen Kreiskegels (Dichte ρ, Masse m, Höhe h, Öffnungswinkel 2α),

1. der auf einer horizontalen Ebene rollt;
2. dessen Basiskreis auf einer horizontalen Ebene rollt, während seine Längsachse parallel zur Ebene verläuft und der Scheitel in einem Punkt fixiert ist.

Abgabetermin Mo, 05.07.2004, 10:00 Uhr