1. Vor.: $f : (U \subset \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ ist stetig differenzierbar, $\xi \in U$ mit $f(\xi) = 0$ und $f'(\xi) \neq 0$.

Iterationsvorschrift des Newton-Verfahrens: $x_n \mapsto x_{n+1} = g(x_n) = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$

a) Beh.: g ist in einer Umgebung von ξ kontrahierend.

Bew.: $g'(x) = 1 - \frac{f'(x) \cdot f'(x) - f(x) \cdot f''(x)}{f'(x)^2} = f(x) \cdot \frac{f''(x)}{f'(x)^2}$

Da $g'(\xi) = 0$ ist und g in der Umgebung von ξ, in der $f'(x) \neq 0$ bleibt, stetig ist,

gibt es eine offene Umgebung V von ξ, in der (z.B.) $|g'(x)| < \frac{1}{2}$ ist. Aus dem Lagrangeprinzip folgt damit:

1. $\forall_{x_1, x_2 \in V} : |g(x_1) - g(x_2)| < \frac{1}{2} \cdot |x_1 - x_2|$ und

2. $\forall_{x \in V} : |g(x) - \xi| = |g(x) - g(\xi)| < \frac{1}{2} \cdot |x - \xi|$, d.h. aus $x \in V$ folgt $g(x) \in V$.

$\Rightarrow$ g ist auf V kontrahierend.

b) Beh.: Für $f(x) = x^2 - 2$ wird $\xi = \sqrt{2}$ durch $x_0 = 1$, $\quad x_1 = \frac{3}{2}$, $\quad x_2 = \frac{17}{12}$, $\quad x_3 = \frac{577}{408}$ approximiert.

Bew.: $g(x) = x - \frac{x^2 - 2}{2x} = \frac{x}{2} - \frac{1}{x}$

$x_1 = g(x_0) = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}, \qquad x_2 = g(x_1) = \frac{3}{4} + \frac{2}{3} = \frac{9+8}{12}, \qquad x_3 = g(x_2) = \frac{17}{24} + \frac{12}{17} = \frac{17 \cdot 17 + 12 \cdot 24}{24 \cdot 17}$

c) Vor.: $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$

Beh.: Das Newton-Verfahren konvergiert gegen $\xi = 0$, wenn $x_0 \in U =]-\frac{1}{3}\sqrt{3}, \frac{1}{3}\sqrt{3}[$.

Bew.: $f'(x) = \frac{1 \cdot (x^2+1) - x \cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2} \quad \Rightarrow \quad g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} = x - \frac{x}{1+x^2} \cdot \frac{(1+x^2)^2}{1-x^2} = \frac{x \cdot (1-x^2) - x(1+x^2)}{1-x^2} = \frac{-2x^3}{1-x^2}$

g kontrahiert in einer Umgebung von 0, wenn $|g(x)| < |x|$ ist. Da g eine ungerade Funktion ist, genügt es,

den Fall $x > 0$ zu betrachten; dann muß $x < 1$ sein, denn $\lim\limits_{x \to 1-0} g(x) = \infty$.

Damit muß $|g(x)| = \frac{2x^3}{1-x^2} < x = |x|$ sein. $\quad \Leftrightarrow \; 2x^3 = x \cdot (1 - x^2) \quad \Leftrightarrow \; 3x^3 < 1 \quad \Leftrightarrow \; |x| < \frac{1}{3}\sqrt{3}$

Also kontrahiert g zwischen $-\frac{1}{3}\sqrt{3}$ und $\frac{1}{3}\sqrt{3}$.

d) Vor.: $f : (U \subset \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}^n, \quad \xi \in U, \quad f(\xi) = 0$

Beh.: Iterationsvorschrift zur Bestimmung von ξ : $\quad x_n \mapsto x_{n+1} = g(x_n) = x_n - D_f(x_n)^{-1} \cdot f(x_n)$

Bew.: $f(x_{n+1}) = f\big(x_n - \underbrace{D_f(x_n)^{-1} \cdot f(x_n)}_{\text{klein}}\big) \approx f(x_n) - D_f(x_n) \cdot \big(D_f(x_n)^{-1} \cdot f(x_n)\big) = f(x_n) - id_{\mathbb{R}^n} f(x_n) = 0.$

2. Vor.: $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \;\; (r, \theta, \varphi) \mapsto (r \sin\theta \cos\varphi, \; r \sin\theta \sin\varphi, \; r \cos\theta)$

Beh.: f ist für (r, θ, φ) mit $r \neq 0$ und $\theta \neq k \cdot \pi \;\; (k \in \mathbb{Z})$ lokal umkehrbar.

Bew.: $D_f(r, \theta, \varphi) = \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\varphi & r\cos\theta\cos\varphi & -r\sin\theta\sin\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & r\cos\theta\sin\varphi & r\sin\theta\cos\varphi \\ \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \end{pmatrix}$

$\det D_f(r, \theta, \varphi) = 0 + r^2 \cos^2\theta \sin\theta \cos^2\varphi + r^2 \sin^3\theta \sin^2\varphi + r^2 \cos^2\theta \sin\theta \sin^2\varphi - 0 + r^2 \sin^3\theta \cos^2\varphi$

$= r^2 \cos^2\theta \sin\theta \cdot (\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) + r^2 \sin^3\theta \cdot (\sin^2\varphi + \cos^2\varphi) = r^2 \sin\theta \cdot (\cos^2\theta + \sin^2\theta) = r^2 \sin\theta$

$\det D_f(r, \theta, \varphi) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad r = 0 \;\vee\; \sin\theta = 0 \quad \Leftrightarrow \quad r = 0 \;\vee\; \theta = k \cdot \pi \;\; (k \in \mathbb{Z})$

Beh.: Dann ist $D_f(r, \theta, \varphi)^{-1} = \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\varphi & \sin\theta\sin\varphi & \cos\theta \\ \frac{\cos\theta\cos\varphi}{r} & \frac{\cos\theta\sin\varphi}{r} & -\frac{\sin\theta}{r} \\ \frac{-\sin\varphi}{r\sin\theta} & \frac{\cos\varphi}{r\sin\theta} & 0 \end{pmatrix}.$

Bew.: Bezeichnen A_{ij} die durch Streichung der i-ten Zeile und j-ten Spalte entstehenden Matrizen, so ist

$\det A_{11} = r^2 \sin^2\theta \cos\varphi$ $\qquad \det A_{21} = -r^2 \sin^2\theta \sin\varphi$

$\det A_{31} = r^2 \cdot (\sin\theta\cos\theta\cos^2\varphi + \sin\theta\cos\theta\sin^2\varphi)$ $\qquad \det A_{12} = -r \sin\theta \cos\theta \cos\varphi$

$\det A_{22} = r \sin\theta \cos\theta \sin\varphi$ $\qquad \det A_{32} = r \cdot (\sin^2\theta \cos^2\varphi + \sin^2\theta \sin^2\varphi)$

$\det A_{13} = -r \cdot (\sin^2\theta \sin\varphi + \cos^2\theta \sin\varphi)$ $\qquad \det A_{23} = -r \cdot (\sin^2\theta \cos\varphi + \cos^2\theta \cos\varphi)$

$\det A_{33} = r \cdot (\sin\theta\cos\theta\sin\varphi\cos\varphi - \sin\theta\cos\theta\sin\varphi\cos\varphi)$

$$\Rightarrow\ D_f(r,\ \theta,\ \varphi)^{-1} = \tfrac{1}{\det D_f(r,\ \theta,\ \varphi)} \cdot \left((-1)^{i+j}\cdot\det A_{ji}\right)_{i,j}$$

$$D_f(r,\ \theta,\ \varphi)^{-1} = \tfrac{1}{r^2\sin\theta} \cdot \begin{pmatrix} r^2\sin^2\theta\cos\varphi & r^2\sin^2\theta\sin\varphi & r^2\sin\theta\cos\theta \\ r\sin\theta\cos\theta\cos\varphi & r\sin\theta\cos\theta\sin\varphi & -r\sin^2\theta \\ -r\sin\varphi & r\cos\varphi & 0 \end{pmatrix} = \text{Beh.}$$

Beh.: $g:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3,\ (x,\ y,\ z)\mapsto (r=\sqrt{x^2+y^2+z^2},\ \ \theta = \arccos\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},\ \ \varphi = \arctan\frac{y}{x})$

ist eine Umkehrfunktion von f in einer Umgebung von $x=y=z=1$.

Bew.: $g(1,\ 1,\ 1) = (\sqrt{3},\ \arccos\frac{1}{\sqrt{3}},\ \arctan\frac{1}{1}=\frac{\pi}{4})$ und $f(\sqrt{3},\ \arccos\frac{1}{\sqrt{3}},\ \frac{\pi}{4}) = \left(\sqrt{3}\cdot\sqrt{\frac{2}{3}}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{2},\ \ \sqrt{3}\cdot\sqrt{\frac{2}{3}}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{2},\ \ \sqrt{3}\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

$=(1,\ 1,\ 1)$, weil $\sin(\arccos\frac{1}{\sqrt{3}}) = \sqrt{(1-\cos^2(\arccos\frac{1}{\sqrt{3}})} = \sqrt{\frac{3}{3}-\frac{1}{3}}$ und $\sin\frac{\pi}{4}=\cos\frac{\pi}{4}=\frac{1}{2}\sqrt{2}$.

Es ist wegen $x,y,z>0:\quad f(g(x,\ y,\ z)) =$

$$\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\cdot\sqrt{1-\tfrac{z^2}{x^2+y^2+z^2}}\cdot\tfrac{1}{\sqrt{1+\frac{y^2}{x^2}}},\ \ \sqrt{x^2+y^2+z^2}\cdot\sqrt{1-\tfrac{z^2}{x^2+y^2+z^2}}\cdot\tfrac{\frac{y}{x}}{\sqrt{1+\frac{y^2}{x^2}}},\ \ \sqrt{x^2+y^2+z^2}\cdot\tfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right)$$

$$=\left(\sqrt{(x^2+y^2+z^2)-z^2}\cdot\tfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\ \ \sqrt{(x^2+y^2+z^2)-z^2}\cdot\tfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}},\ \ z\right) = (x,\ y,\ z),$$

denn $\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}}\ \Rightarrow\ \cos(\arctan a) = \frac{1}{\sqrt{1+a^2}}$ und $\sin\alpha = \frac{\tan\alpha}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}}\ \Rightarrow\ \sin(\arctan a) = \frac{a}{\sqrt{1+a^2}}$.

3\. Vor.: $S^2 := \{\ v\in\mathbb{R}^3\ \big|\ |v|=1\ \}$

Beh.: Seien $U_{2i-1} := \{\ (x_1,\ x_2,\ x_3)\in S^2\ \big|\ x_i>0\ \}$ und $U_{2i} := \{\ (x_1,\ x_2,\ x_3)\in S^2\ \big|\ x_i<0\ \}\quad (1\le i\le 3)$,

$m_{\neq i} := \min\{\ j\in\{1,2,3\}\ \big|\ j\neq i\ \}$ und $M_{\neq i} := \max\{\ j\in\{1,2,3\}\ \big|\ j\neq i\ \}$,

sowie $B_1(0) := \{\ (y_1,\ y_2)\in\mathbb{R}^2\ \big|\ {y_1}^2+{y_2}^2<1\ \}\ \subset\ \mathbb{R}^2$ offen.

$\varphi_{2i-1}: U_{2i-1}\to B_1(0)$ und $\varphi_{2i}: U_{2i}\to B_1(0)$; mit jeweils $(x_1,\ x_2,\ x_3)\to(x_{m_{\neq i}},\ x_{M_{\neq i}})\quad (1\le i\le 3)$.

sind Karten von S^2, und es gilt $S^2 = \bigcup\limits_{1\le k\le 6} U_k$.

Bew.: Mit den offenen Mengen$V_i := \{\ (x_1,\ x_2,\ x_3)\in\mathbb{R}^3\ \big|\ {x_{m_{\neq i}}}^2+{x_{M_{\neq i}}}^2<1\ \}$ sind die Abbildungen

$h_{2i-1}: V_i\to B_1(0)\times\mathbb{R},\ \ (x_1,\ x_2,\ x_3)\mapsto\left(x_{m_{\neq i}},\ \ x_{M_{\neq i}},\ \ x_i-\sqrt{1-({x_{m_{\neq i}}}^2+{x_{M_{\neq i}}}^2)}\right)$

bzw. $h_{2i}: V_i\to B_1(0)\times\mathbb{R},\ \ (x_1,\ x_2,\ x_3)\mapsto\left(x_{m_{\neq i}},\ \ x_{M_{\neq i}},\ \ x_i+\sqrt{1-({x_{m_{\neq i}}}^2+{x_{M_{\neq i}}}^2)}\right)$

sind auf V_i wegen $\sqrt{1-({x_{m_{\neq i}}}^2+{x_{M_{\neq i}}}^2)}>0$ offensichtlich stetig differenzierbar - ebenso ihre Umkehrabbildungen

$h_1^{-1},\ \ h_2^{-1}: B_1(0)\times\mathbb{R}\to V_1,\quad (y_1,\ y_2,\ y_3)\mapsto\left(y_3\pm\sqrt{1-({y_1}^2+{y_2}^2)},\ \ y_1,\ \ y_2\right)$

$h_3^{-1},\ \ h_4^{-1}: B_1(0)\times\mathbb{R}\to V_2,\quad (y_1,\ y_2,\ y_3)\mapsto\left(y_1,\ \ y_3\pm\sqrt{1-({y_1}^2+{y_2}^2)},\ \ y_2\right)$

$h_5^{-1},\ \ h_6^{-1}: B_1(0)\times\mathbb{R}\to V_3,\quad (y_1,\ y_2,\ y_3)\mapsto\left(y_1,\ \ y_2,\ \ y_3\pm\sqrt{1-({y_1}^2+{y_2}^2)}\right)$.

Da $\varphi_k = h_k\,|_{U_k}$ für alle $1\le k\le 6$, sind die φ_k Karten von S^2.

Es ist $U_{2i-1}\cup U_{2i} = \{\ (x_1,\ x_2,\ x_3)\in S^2\ \big|\ x_i\neq 0\ \}$. Da $(0,0,0)\notin S^2$, folgt sofort $S^2 = \bigcup\limits_{1\le k\le 6} U_k$.

4\. Vor.: $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2,\ f(x,\ y) = (x^3-3xy^2,\ \ 3x^2y-y^3)$

a) Beh.: f ist surjektiv.

Bew.: Es ist $\cos(3\varphi) = \cos(2\varphi)\cos\varphi - \sin(2\varphi)\sin\varphi = (\cos^2\varphi-\sin^2\varphi)\cdot\cos\varphi - (2\sin\varphi\cos\varphi)\cdot\sin\varphi = \cos^3\varphi - 3\sin^2\varphi\cos\varphi$,

und $\sin(3\varphi) = \sin(2\varphi)\cos\varphi + \cos(2\varphi)\sin\varphi = (2\sin\varphi\cos\varphi)\cdot\cos\varphi + (\cos^2\varphi-\sin^2\varphi)\cdot\sin\varphi = 3\cos^2\varphi\sin\varphi - \sin^3\varphi$.

$\Rightarrow\ f(r\cos\varphi,\ \ r\sin\varphi) = \left(r^3\cdot(\cos^3\varphi-3\sin^2\varphi\cos\varphi),\ \ r^3\cdot(3\cos^2\varphi\sin\varphi-\sin^3\varphi)\right) = (r^3\cdot\cos(3\varphi),\ \ r^3\cdot\sin(3\varphi))$.

$\Rightarrow\ f\left(\ \{(r\cos\varphi,\ \ r\sin\varphi)\in\mathbb{R}^2\mid r\ge 0,\ \ 0\le\varphi<\frac{2\pi}{3}\}\ \right)\ =\ \mathbb{R}^2$.

Beh.: f ist außerhalb des Ursprungs invertierbar.

Bew.: $D_f(x,\ y) = \begin{pmatrix} 3x^2-3y^2 & -6xy \\ 6xy & 3x^2-3y^2 \end{pmatrix}$

$\det D_f(x,\ y) = 9x^4-18x^2y^2+9y^4+36x^2y^2 = 9(x^2+y^2)\neq 0$ für $(x,\ y)\neq(0,\ 0)$.

b) Beh.: Jedes $v=(r\cos\varphi,\ r\sin\varphi)\ \in\ \mathbb{R}^2\backslash\{(0,\ 0)\}$ hat unter f drei verschiedene Urbilder.

Bew.: $v_1 := \left(\sqrt[3]{r}\ \cos\frac{\varphi}{3},\ \sqrt[3]{r}\ \sin\frac{\varphi}{3}\right)$, $v_2 := \left(\sqrt[3]{r}\ \cos\left(\frac{2\pi+\varphi}{3}\right),\ \sqrt[3]{r}\ \sin\left(\frac{2\pi+\varphi}{3}\right)\right)$, $v_3 := \left(\sqrt[3]{r}\ \cos\left(\frac{4\pi+\varphi}{3}\right),\ \sqrt[3]{r}\ \sin\left(\frac{4\pi+\varphi}{3}\right)\right)$.

$r>0\ \Rightarrow\ v_1, v_2$ und v_3 sind paarweise verschieden. Es ist $f(v_1)=f(v_2)=f(v_3)=(r\cos\varphi,\ r\sin\varphi)=v$.