Universität Regensburg
NWF I — Mathematik
Prof. Dr. U. Jannsen, Dr. P. Schlagheck, Dr. I. Kausz

Sommersemester 2004

# Klausur zur Analysis II für Physiker

1. Gegeben ist die Kurve $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2,\ t \mapsto (t^3, 2-2t^2)$

   (a) Berechnen Sie die Bogenlänge von $\gamma$.

   (b) An welchem Punkt $(x_0, y_0)$ auf der Kurve ist der Richtungsvektor proportional zu $(v_x, v_y) = (1, -2)$?

   (c) Skizzieren Sie $\gamma$.

   (d) Berechnen Sie den von $\gamma$ und den beiden Koordinatenachsen eingeschlossenen Flächeninhalt.

2. Für $a, b, c > 0$ definieren wir die Transformation

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, (r, \theta, \varphi) \mapsto (ar\sin\theta\cos\varphi, br\sin\theta\sin\varphi, cr\cos\theta)\,.$$

   (a) Berechnen Sie die Jacobi-Matrix der Transformation und geben Sie an, für welche $(r, \theta, \varphi) \in \mathbb{R}^3$ $f$ lokal umkehrbar ist.

   (b) Ermitteln Sie eine Umkehrfunktion $g : U \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ von $f$ für eine Umgebung $U$ von $(x, y, z) = (-a, -b, -c)$.

3. (a) Berechnen Sie die kritischen Punkte von

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, (x, y, z) \mapsto 2y^3 + x^2 + 3y^2 + 2z^2 - 2yz + x - y$$

   und geben Sie an, ob es sich dabei um Maxima, Minima oder Sattelpunkte von $f$ handelt.

   (b) Berechnen Sie die Extremwerte von

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, (x, y, z) \mapsto x^2 + y^2 + 3z^2 + xy$$

   auf der Einheitskugel $S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ mit der Methode der Lagrange-Multiplikatoren.

4. Berechnen Sie $\displaystyle\int_V (x^2 + y^2)\, dx\, dy\, dz$ (also das Trägheitsmoment bezüglich der Rotation um die $z$-Achse) für

   (a) den Zylinder $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : -L \leq x \leq L \text{ und } 0 \leq y^2 + z^2 \leq R^2\}$ mit $L, R > 0$,

   (b) das Ellipsoid $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + \lambda^2 z^2 \leq R^2\}$ mit $\lambda, R > 0$.

5. Gegeben seien $A = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ und $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

   (a) Bestimmen Sie ein reelles Fundamentalsystem für das Differentialgleichungssystem $y'(t) = Ay(t)$.

   (b) Geben Sie für das Differentialgleichungssystem $y'(t) = Ay(t) + b$ eine konstante Lösung $y_c$ an.

   (c) Bestimmen Sie die Lösung von $y'(t) = Ay(t) + b$ zur Anfangsbedingung $y(0) = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$.

6. Berechnen Sie alle reellen Lösungen der Differentialgleichung

$$y'(x) = \frac{xy(x) + 1}{1 - x^2}$$

für $|x| < 1$. Welche Lösung ergibt sich für den Anfangswert $y(0) = 0$?

7. Berechnen Sie für die zweidimensionale Untermannigfaltigkeit

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = \exp(-x^2 - y^2)\}$$

und die 2-Form $\omega = xdy \wedge dz + ydz \wedge dx + zdx \wedge dy$ das Integral $\int_M \omega$.

8. Sei $U := [0, \pi/4] \times [0, \pi/4] \subset \mathbb{R}^2$. Berechnen Sie das Integral $\int_{\partial U} \alpha$ für

   (a) $\alpha = \left[\cos y + xf(x^2 + y^2)\right] dx + \left[\sin x + yf(x^2 + y^2)\right] dy$ mit $f : \mathbb{R}_+ \cup \{0\} \to \mathbb{R}, r \mapsto (\sqrt{r})^{101}$,

   (b) $\alpha = dg$ mit $g = \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto \sin[xy \arctan(x - y)]$.

   Sie können dabei den Satz von Stokes verwenden.

---

Arbeitszeit: 180 Minuten

Bitte bearbeiten Sie jede Aufgabe auf einem separaten Blatt.
Vergessen Sie nicht, auf jedem Blatt ihren Namen anzugeben.

Einige nützliche Integrale (nicht alle kommen vor):

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} = \arcsin x \qquad \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm 1}} = \ln\left(x + \sqrt{x^2 \pm 1}\right)$$

$$\int \frac{dx}{1 + x^2} = \arctan x \qquad \int \frac{xdx}{x^2 \pm 1} = \frac{1}{2} \ln\left(x^2 \pm 1\right)$$

Viel Erfolg!