
LICHTKURVENMODELLIERUNG DES MIKROLINSENEFFEKTS IN DOPPELSTERNEN MIT KOMPAKTEN BEGLEITERN

Bachelor-Arbeit

zur Erlangung des Grades

Bachelor of Science (B.Sc.)

im Studiengang Physik

vorgelegt am 31.03.2015

von **Marc Schuster**

Dr. Karl Remeis Sternwarte Bamberg
Astronomisches Institut der
Friedrich-Alexander-Universität Erlangen-Nürnberg

Betreuer: Prof. Dr. Ulrich Heber, Dr. Andreas Irrgang

*„Es gibt eine Theorie, die besagt, wenn
jemals irgendwer genau herausfindet,
wozu das Universum da ist und warum
es da ist, dann verschwindet es auf der
Stelle und wird durch noch etwas
Bizarreres und Unbegreiflicheres ersetzt.
- Es gibt eine andere Theorie, nach der
das schon passiert ist.“*

Douglas Adams

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
2	Grundlagen	2
2.1	Doppelsternsysteme	2
2.2	Weißer Zwerge	4
2.3	Gravitationslinsen	9
2.4	Microensing Gleichungen	13
2.5	Randverdunkelung (Limb Darkening)	15
2.6	Lichtkurven	18
3	Simulation von Lichtkurven	20
3.1	Funktionsweise des Programms LiMo	20
3.2	Test auf Funktionalität	23
3.3	Marsh Kurven	28
3.4	Erweiterung um den Randverdunkelungseffekt	32
3.5	Diskussion	36
A	Limits von LiMo	37
B	Ausblick	38
C	Danksagung	39
D	Quellcode	41

1 Einleitung

Aus photometrischen Daten lassen sich sehr viele Erkenntnisse über ansonsten verborgene Parameter von Sternsystemen ableiten. Da moderne Teleskope bezüglich ihrer Lichtempfindlichkeit immer leistungsfähiger werden, ist es nötig Effekte zu berücksichtigen, welche wegen ihres geringen Einflusses bisher vernachlässigt wurden. Daher befasst sich diese Arbeit mit den Grundlagen von bedeckungsveränderlichen Sternsystemen und deren Lichtkurven - im speziellen Systeme mit mindestens einem kompakten Objekt. Bei diesen kompakten Objekten kommt es aufgrund deren Beeinflussung der Raumzeit gemäß der Allgemeinen Relativitätstheorie zu einer Lichtablenkung, welche den Verlauf der Lichtkurven verändern. Um dies zu simulieren wird zuerst ein einfaches Modell gestaltet, welches dann in einem Computerprogramm umgesetzt wird. Dieses wird um dem Mikrolinseneffekt (microlensing) erweitert und mit Daten aus [1] verglichen. Eine Erweiterung um Randverdunkelung (limb darkening) bietet neue Funktionalität, welche über die Arbeit von Marsh ([1]) hinausgeht.

2 Grundlagen

2.1 Doppelsternsysteme

Blickt man am Tag zum Himmel, sieht man unsere Sonne als einzigen Stern. Aufgrund dieser Erfahrung könnte man meinen dass dies der Normalfall ist. Jedoch überrascht es, dass mehr als die Hälfte aller Sternensysteme Doppel- oder sogar Mehrfachsysteme sind. Würde man also in solch einem System den Sonnenuntergang beobachten, müsste es ungefähr so aussehen wie in Abbildung 1.



Abbildung 1: So könnte man sich einen Sonnenuntergang in einem Binärsystem vorstellen.

(Quelle: http://www.starwarss.de/media/tatooine_luke_skywalker.jpg)

Betrachtet man nun die Sterne am Nachthimmel findet man z.B. in der Deichsel des großen Wagens den Stern Mizar und nur etwas darüber den Stern Alkor¹. Bei diesen beiden Sternen handelt es sich um die erste Kategorie: **optische Doppelsterne** (oder scheinbare Doppelsterne). In Wirklichkeit haben die beiden einen Abstand von ca. 3 Lichtjahren und sind somit nicht gravitativ aneinander gebunden.

Betrachtet man Mizar genauer findet man heraus, dass dieser doch einen echten Begleiter besitzt (Mizar A und B). Somit fällt er in die zweite Kategorie: **physische Doppelsterne**. Diese unterteilt man wiederum in **visuelle Doppelsterne**, **bedeckungsveränderliche Doppelsterne** sowie in **spektroskopische Doppelsterne**.

¹Diese beiden Sterne werden auch „Augenprüfer“ genannt, da nicht jeder Mensch zwei Lichtpunkte erkennen kann.

Da das Doppelsternsystem um Mizar mit einem geeigneten Teleskop optisch auflösbar ist, handelt es sich hier um einen visuellen Doppelstern. Viele Systeme sind jedoch zu weit entfernt und erscheinen selbst in den leistungsfähigsten Teleskopen als ein einziger Lichtpunkt. Hier werden andere Methoden benötigt um Begleitsterne nachzuweisen.

1889 hat Edward Charles Pickering das Spektrum von Mizar A und B untersucht und dort periodische Schwankungen bemerkt. Die Spektrallinien pendelten zwischen einer Rot- und Blauverschiebung, was bedeutet, dass der Stern sich einmal von uns weg und dann wieder auf uns zu bewegt. Das kommt daher, weil sich der Stern mit seinem Begleiter um ein gemeinsames Massezentrum bewegt und dadurch die gleiche Schlingerbewegung ausführt wie ein Hammerwerfer. Mizar A und B sind also jeweils spektroskopische Doppelsterne - dies macht Mizar schlussendlich sogar zu einem Vierfachsystem.²

Falls nun die geometrische Ausrichtung des Systems in Bezug auf unsere Sichtlinie günstig ist, kann man anhand einer Messung der Intensität einen periodischen Abfall der Leuchtkraft feststellen. Ist dies der Fall bezeichnet man das System als **bedeckungsveränderlich** (Ausführlich in Kapitel 2.6).

²<http://de.wikipedia.org/wiki/Mizar>

2.2 Weiße Zwerge

Um den Entstehungsprozess eines weißen Zwerges zu verstehen, muss man den Lebensweg eines massearmen Sternes betrachten. Hierzu gehören im Allgemeinen Sterne mit weniger als 8 Sonnenmassen ($M_{\text{Sonne}} = M_{\odot} \approx 2 \times 10^{30} \text{kg}$). Die im Folgenden beschriebenen Stationen des Sternenlebens sind grafisch in Abbildung 3 zusammengefasst.

Ein Sternenleben beginnt, sobald der Druck und die Temperatur in dessen Kern groß genug ist³, um Wasserstoff mit dem PP-Zyklus zu Helium zu fusionieren (*Wasserstoffbrennen*). Dieser befindet sich nun auf der Hauptreihe im Hertzsprung-Russell-Diagramm (Abbildung 2). Das während der Fusion entstehende Helium setzt sich als „Asche“ im Kern des Sternes ab. Da die Bedingungen für das Heliumbrennen noch nicht gegeben sind, bildet sich eine Schale um den Kern aus, in der weiterhin Wasserstoffbrennen stattfindet. Zu diesem Zeitpunkt verlässt er die Hauptreihe und wandert in Richtung des Riesenastes (roter Riese). Druck und Temperatur im Kern steigen stetig an bis schließlich eine schlagartige Fusion des Heliums einsetzt. Dies bezeichnet man als den *Helium-flash*. Im Kern wird nun Helium zu Kohlenstoff mittels des 3α -Prozesses fusioniert (*Heliumbrennen*) und der Stern befindet sich auf dem Horizontalast.

Der entstandene Kohlenstoff kann durch den zu geringen Druck nicht weiter fusioniert werden, wodurch wieder ein Schalenbrennen beginnt. Der Stern befindet sich nun auf dem AGB (engl. *asymptotic giant branch*) und wandert diesen nach oben. Die äußere Hülle bläht sich immer weiter auf, bis schlussendlich ein großer Teil abgestoßen wird. Der Kern liegt jetzt frei und regt den ihn umgebenden planetarischen Nebel durch seine Strahlung zum Leuchten an (Ein solches beeindruckendes Beispiel kann in Abbildung 5 betrachtet werden). Der freiliegende Kern besteht jetzt nur noch aus Kohlenstoff und Sauerstoff mit einer Schale aus Helium und Wasserstoff (siehe Abbildung 4).

Zum jetzigen Zeitpunkt sind jegliche Fusionsreaktionen im Kern zum Erliegen gekommen. Ist die Masse des Überrestes kleiner als die Chandrasekhar Grenze von $1.2 - 1.4 M_{\odot}$ kann der Entartungsdruck der Elektronen den beginnenden Kollaps aufhalten. Diese Gegenkraft resultiert aus quantenmechanischen Effekten, da der weiße Zwerg als ein entartetes Elektronengas beschrieben werden kann. Gemäß dem Pauli-Prinzip können Elektronen pro Energieniveau nicht in allen Quanteneigenschaften übereinstimmen.⁴ Dies hat zur Folge, dass die zur Verfügung stehenden Energieniveaus nicht nach Belieben befüllt werden können, sondern ab einer Maximalbesetzung keine weiteren Elektronen mehr aufnehmen können. Dieser Mechanismus bietet nun den Gegendruck zur wirkenden Gravitation und stabilisiert den Überrest des Sterns.

³Im Kern der Sonne herrscht ein Druck von ca. $2.34 \times 10^{16} \text{Nm}^2$, sowie eine Temperatur von $1.57 \times 10^7 \text{K}$

⁴Dies gilt für alle Fermionen, zu denen auch die Elektronen gehören.

Weißer Zwerge besitzen typischerweise Massen im Bereich M_{\odot} , jedoch Radien die sich in der Größenordnung unserer Erde befinden, was zu einer extrem hohen Dichte von bis zu 10^{10}kg m^{-3} führt. Der Zustand von Materie unter solchen extremen Bedingungen wird anhand eines nicht-relativistisch entarteten Elektronengases beschrieben. Nach Chandrasekhar ergibt sich hieraus folgende Masse-Radius-Beziehung, welche besagt, dass massereichere weiße Zwerge kleiner sind als die masseärmeren:

$$R \propto M^{-\frac{1}{3}}$$

Befindet sich der Stern in einem Einfachsystem, kühlt er nun langsam aus und wandelt sich in einen schwarzen Zwerg. Falls er sich jedoch in einem Doppelsystem befindet, in dem der Abstand zu seinem Begleiter kleiner ist als die Roche-Grenze, kann es durch den stattfindenden Massentransfer zu kurzzeitigem Wiedereinsetzen der Fusionsreaktion (sog. *Novae*) oder sogar zu einer vollständigen Zerstörung des Sternrestes kommen. Unmittelbar nach dem Überschreiten der Chandrasekhar-Grenze findet eine schlagartige Fusion des gesamten Kohlenstoffes im Kern statt. Daher zeigt diese Supernova immer exakt die gleichen Merkmale. Dies findet Anwendung als astronomische Standardkerze zur Bestimmung von Entfernungen, da der Helligkeitsverlauf solcher Supernovae vom Typ 1a immer gleich ist.

Da die Bedingungen für den Mikrolinseneffekt nur bei sehr kompakten Objekten gegeben sind, beschränkt sich diese Arbeit auf weiße Zwerge. Jedoch wären Neutronensterne oder sogar schwarze Löcher auch mögliche Kandidaten für Mikrolinseneignisse. Da die Lichtablenkung bei Neutronensternen jedoch so stark ist, wäre hier ein völlig neues Konzept zur Berechnung der Lichtkurven nötig und findet hier keine weitere Beachtung.

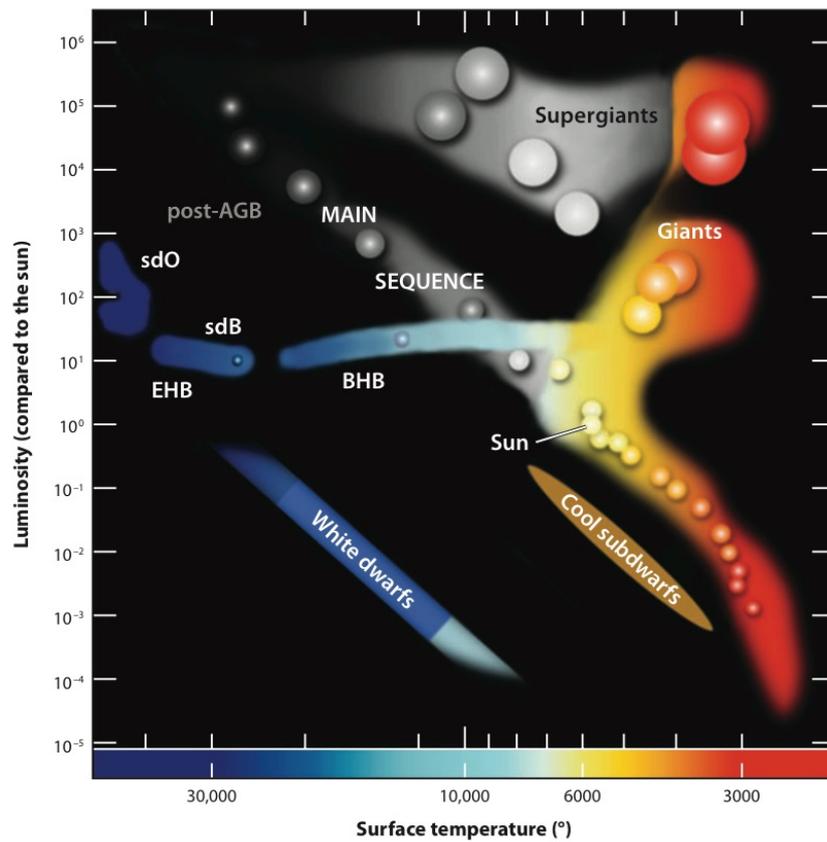


Abbildung 2: Im Hertzsprung-Russell-Diagramm wird die Leuchtkraft gegen die Temperatur aufgetragen. Man erkennt, dass sich Sterne je nach ihrer Entwicklungsstufe in verschiedenen Bereichen befinden. Die Lage der weißen Zwerge zeigt, dass sie sehr heiß sind, jedoch ihre Leuchtkraft aufgrund der geringen Größe schwächer als die der Sonne ist.

(Quelle: [9])

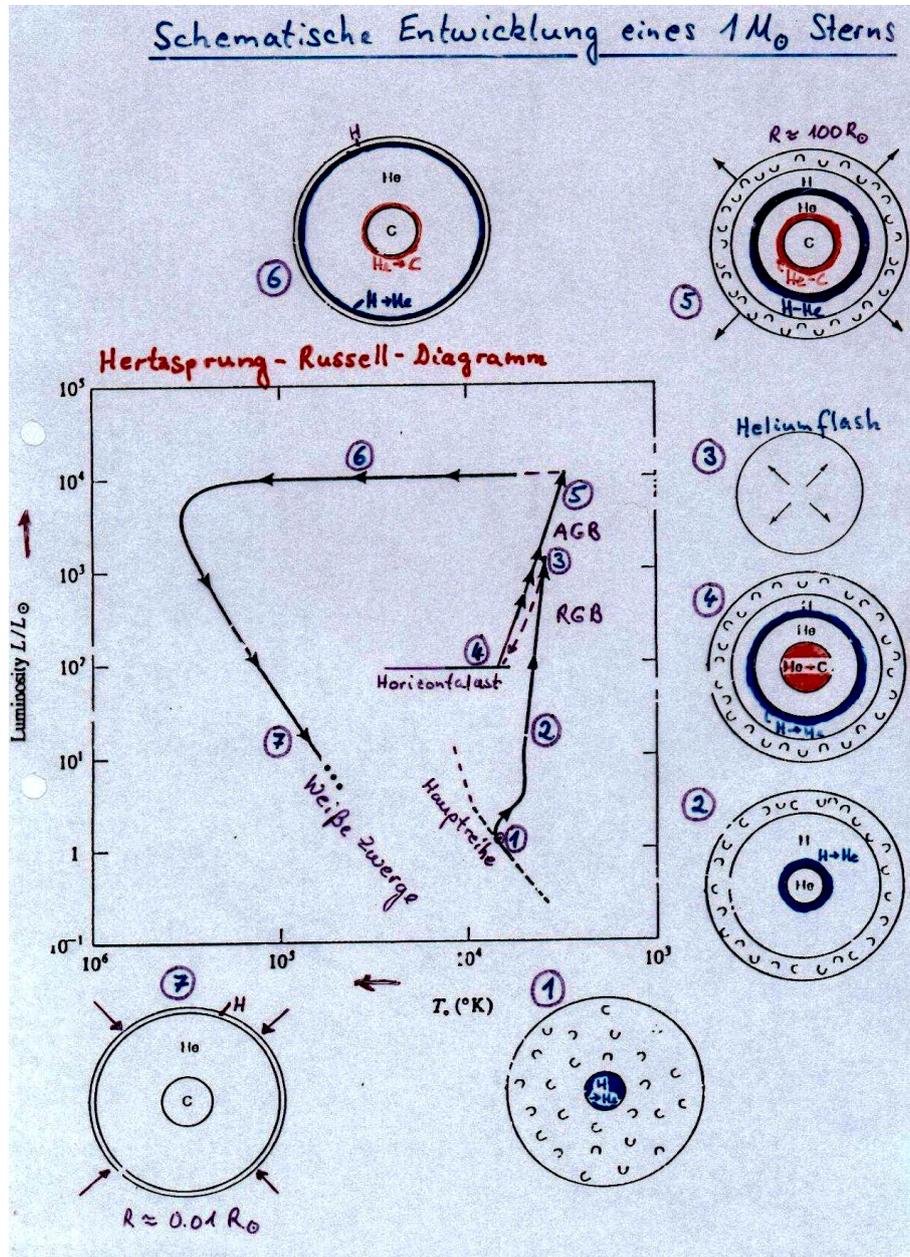


Abbildung 3: Der Lebensweg eines Sternes mit einer Sonnenmasse. Nach Verlassen der Hauptreihe bläht er sich auf und durchläuft die verschiedenen Phasen als roter Riese (Riesenast, Horizontalast und asymptotischer Riesenast), stößt seine äußere Hülle ab und endet als weißer Zwerg. (Quelle: [4])

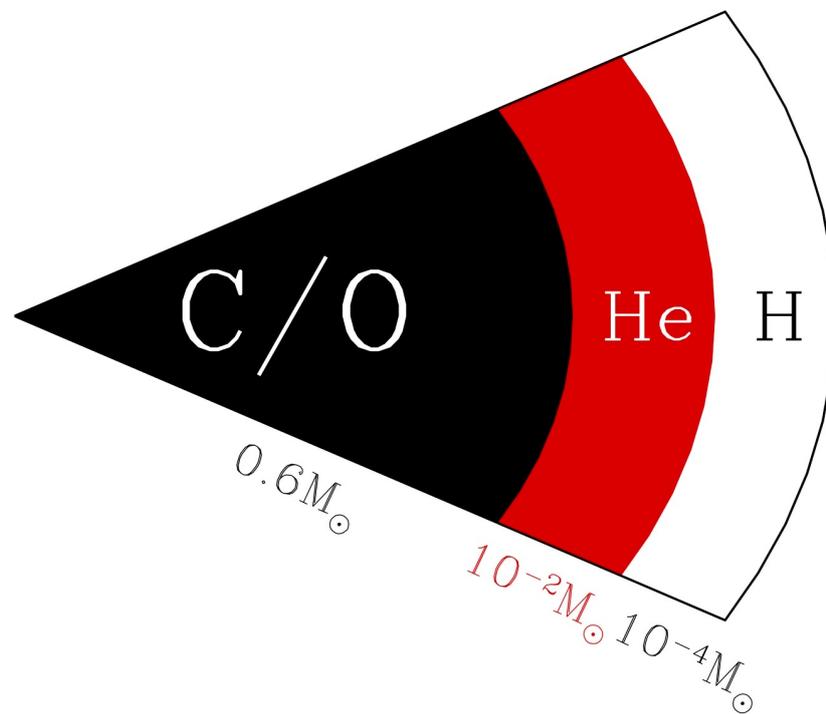


Abbildung 4: So sieht es vermutlich im Inneren eines weißen Zwerges aus. (Quelle: [4])



Abbildung 5: Falschfarbenbild eines planetarischen Nebels (Helix Nebel NGC7293). Der kleine weiße Punkt im Zentrum ist ein weißer Zwerg. Der Nebel selbst besteht aus der abgestossenen Hülle des Sternes. (Quelle: <http://hubblesite.org/gallery/wallpaper/pr2003011a/>)

2.3 Gravitationslinsen

Die grundlegenden Ideen zu einer Lichtablenkung durch Gravitation hatte Albert Einstein bereits 1908.⁵ In seiner Allgemeinen Relativitätstheorie beschreibt er die Gravitation als eine Folge der geometrischen Eigenschaft der vierdimensionalen Raumzeit. Befindet sich Masse in ihr, krümmt diese die Raumzeit, was zur Folge hat, dass sich Lichtstrahlen nun auf Geodäten bewegen. Dadurch können interessante optische Effekte verursacht werden (Abbildung 6, 7). Anschaulich vorstellen kann man sich dies anhand von zwei Schiffen, die jeweils am Äquator, jedoch in einem Kilometer Entfernung starten und exakt gen Norden fahren. Beide Schiffe bewegen sich auf einer aus ihrer Sicht geradlinigen Bahn nach Norden. Da nun jedoch die Erdoberfläche gekrümmt und nicht flach ist, kommen sich beide Schiffe immer näher, je näher sie dem Nordpol kommen. Für die beiden Kapitäne sieht das so aus, als ob eine unsichtbare Kraft sie gegenseitig anzieht, obwohl dies nur ein Resultat der Raumgeometrie ist.

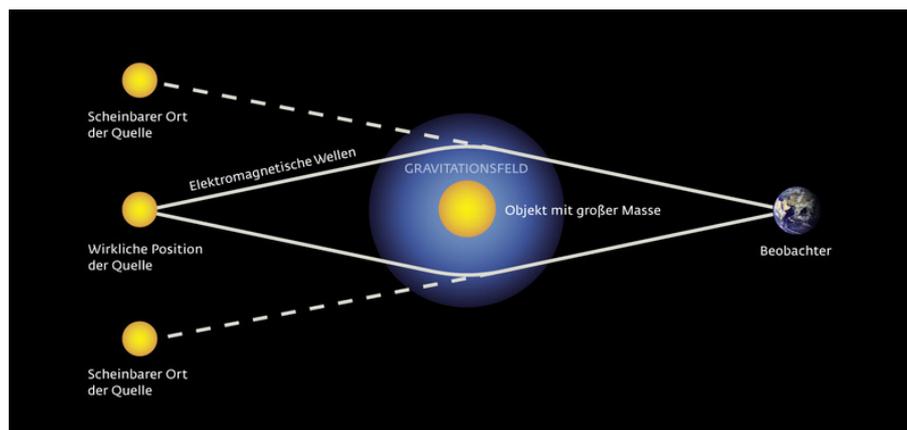


Abbildung 6: Wird ein Objekt durch ein sehr massereiches verdeckt, erkennt der Beobachter aufgrund der gekrümmten Lichtwege zwei Objekte.

(Quelle: <http://www.mpg.de/1174909/zoom.jpg>)

⁵Siehe [2]

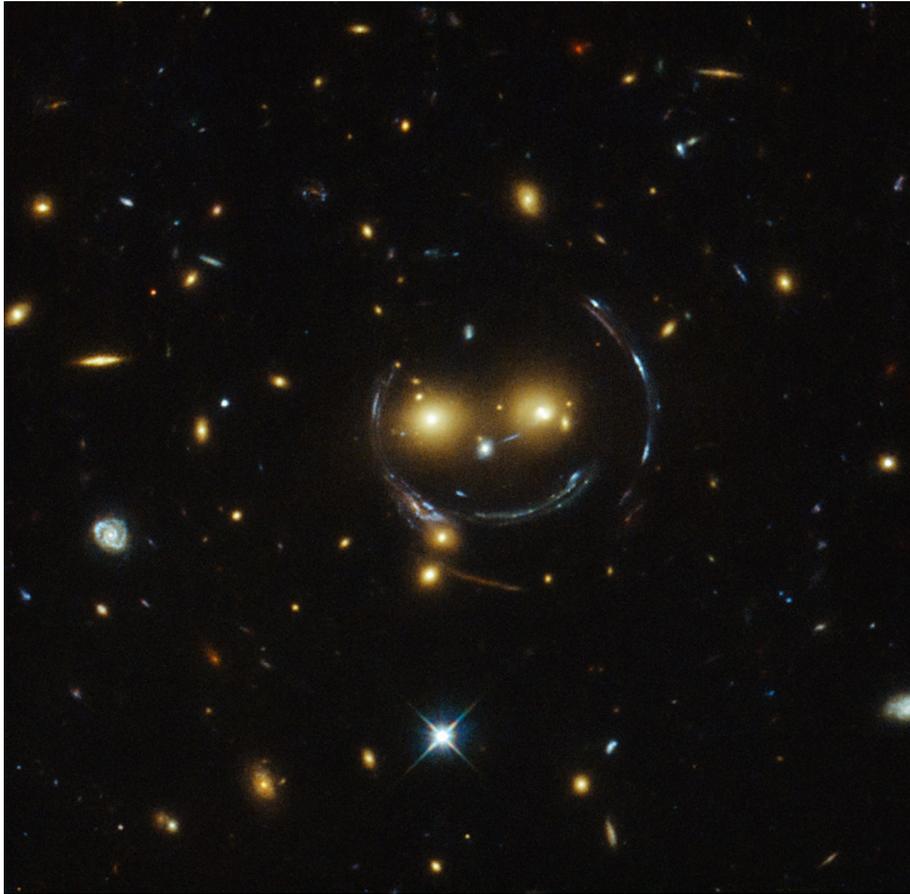


Abbildung 7: Ist das massereiche Objekt symmetrisch und liegt es zusammen mit der Quelle exakt in unserer Sichtlinie, bilden die abgelenkten Lichtstrahlen einen Ring - den sogenannten Einsteinring.
(Quelle: <http://www.spacetelescope.org/static/archives/images/screen/potw1506a.jpg>)

Getrieben von der Hoffnung auf einen experimentellen Nachweis seiner Theorie leitete Einstein 1911 eine Gleichung für den Ablenkwinkel eines Lichtstrahles her und errechnete damit, dass dieser durch die Sonne um 0.83 Bogensekunden abgelenkt werden müsste. Diese Gleichung und somit auch der errechnete Wert waren allerdings noch um den Faktor 2 falsch.⁶ Die korrekte Gleichung wurde dann 1915 in seiner Arbeit über die Allgemeine Relativitätstheorie errechnet. Einstein selbst hatte bereits eine Idee wie diese Vorhersage zu überprüfen wäre: „Da die Fixsterne der der Sonne zugewandten Himmelspartien bei totalen Sonnenfinsternissen sichtbar werden, ist diese Konsequenz der Theorie mit der Erfahrung vergleichbar.“ ([2] S. 908).

Von den Ideen Einsteins fasziniert unternahm der britische Astrophysiker Sir Arthur Stanley Eddington zusammen mit dem Royal Astronomer Frank Watson Dyson bereits 1919 eine Expedition auf die Insel Principe in Westafrika. Dort wurden während einer totalen Sonnenfinsternis am 29. Mai Aufnahmen gemacht, welche Einsteins Theorien bestätigten.

Erste Ideen für eine geometrische Gravitationslinse hatte Einstein im Jahre 1912 (Abbildung 8), verfolgte diese jedoch nicht weiter, da dieses Phänomen seiner Meinung nach nicht beobachtbar sein könne.

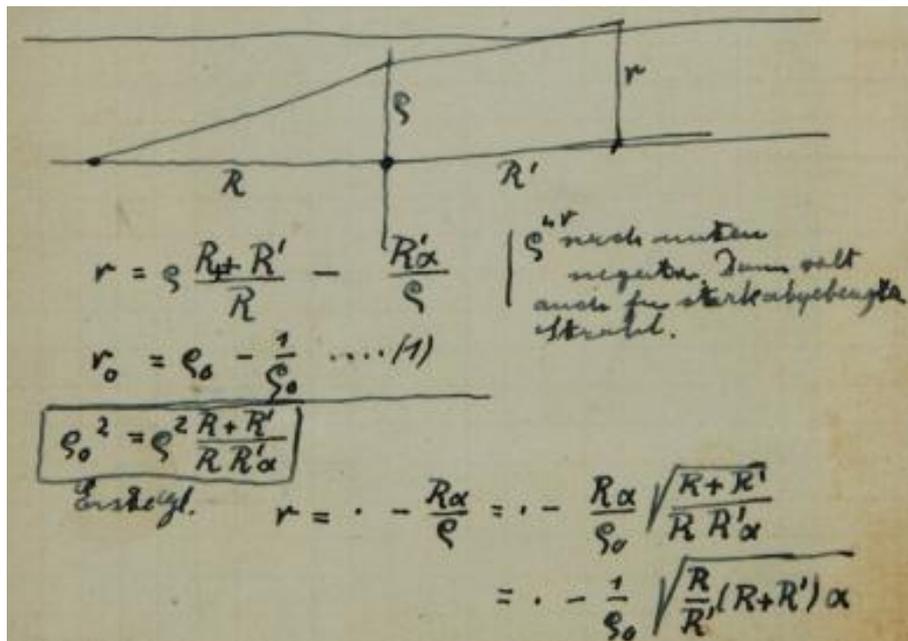


Abbildung 8: Auszug aus dem Notizbuch von Albert Einstein. Hier skizzierte er erstmalig die Lichtablenkung durch eine geometrische Gravitationslinse.

(Quelle: http://www.einstein-online.info/images/vertiefung/GravLinsenGeschichteI/einstein_notebook.jpg)

⁶Tatsächlich sind es am Sonnenrand 1.75 Bogensekunden.

Erst 1936 veröffentlichte er eine kurze Notiz mit dem Titel „Linsenartige Wirkung eines Sterns durch Lichtablenkung im Gravitationsfeld“ im Fachmagazin Science. Dort führte er alle Gleichungen auf und leitete zudem noch eine Lichtverstärkung durch den als Linse wirkenden Stern her. Diese Arbeit unterscheidet sich vom bisherigen Gravitationslinseneffekt (*Makrolinseneffekt*) dadurch, dass nun Objekte betrachtet werden, welche nicht mehr räumlich getrennt werden können. Dies bezeichnet man als **Mikrolinseneffekt**.

Durch diese Veröffentlichung wurden viele Astronomen darauf aufmerksam und erdachten sich Methoden um diesen Effekt tatsächlich beobachten zu können. Es dauerte jedoch noch weitere 43 Jahre bis die erste Gravitationslinse entdeckt wurde. 1979 untersuchten Dennis Walsh, Robert F. Carswell und Ray J. Weymann den Doppelquasar Q0957+561 und identifizierten diesen als ein und das selbe Objekt welches durch eine Gravitationslinse verzerrt wird.

Heutzutage sind Gravitationslinsen ein breites Forschungsgebiet und bieten die Möglichkeit um grundlegende Fragen der Physik zu beantworten wie z.B. die Suche nach dunkler Materie (MACHO's - Massive Compact Halo Objects) oder die Bestimmung der Hubble Konstante.

2.4 Microlensing Gleichungen

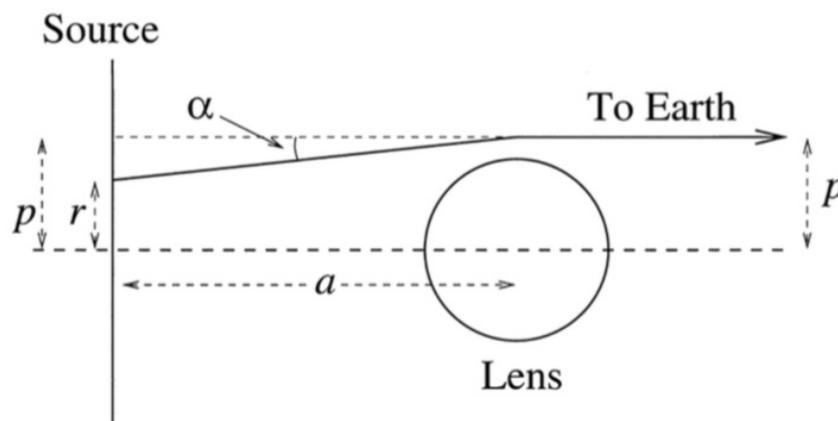


Abbildung 9: Die Geometrie der Lichtablenkung durch eine Punktmasse. Das Licht, welches in einem scheinbaren Abstand p beim Beobachter ankommt, hat seinen Ursprung eigentlich im Abstand r .
(Quelle: [1])

Dieses Kapitel stellt eine Zusammenfassung der Herleitung aus [1] dar. Es beschränkt sich auf den hier relevanten Mikrolinseneffekt, wobei die Gleichungen 1 bis 3 auch für den Makrolinseneffekt gültig sind. Für eine sehr ausführliche Herleitung des Gravitationslinseneffektes im Allgemeinen sei hier auf [3] verwiesen. Um die benötigten Gleichungen herzuleiten, wird vorausgesetzt, dass der Ablenkungswinkel $\alpha \ll 1$, sowie der Radius des Begleitsterns $R_2 \ll a$ ist, wobei a der Bahnabstand der beiden Sterne ist. Betrachtet man nun Abbildung 9 fällt auf, dass einen Beobachter auf der Erde Licht erreicht, welches eigentlich durch den Begleitstern⁷ verdeckt wird. Dies ist möglich, da der Lichtstrahl um einen Winkel α abgelenkt wird:

$$\alpha = \frac{4GM_1}{c^2 p} \quad (1)$$

Nun gilt die Linsengleichung $p = r + a\alpha$ (vgl. Strahlengang in Abbildung 9). Liegen die Quelle und die Linse exakt in einer Sichtlinie zum Beobachter kann man $r = 0$ setzen und erhält daraus den Einsteinradius. Dieser Radius entspricht bei dem Gravitationslinseneffekt dem Radius des Einsteinringes. Bezüglich des Mikrolinseneffektes ist der Einsteinradius lediglich ein Parameter, welcher die Stärke der Lichtverstärkung beeinflusst:

$$R_E = \sqrt{\frac{4GM_1 a}{c^2}} \quad (2)$$

⁷teilweise auch als Linse (engl. *lens*) bezeichnet.

Der Einsteinradius ist eigentlich definiert als $R_E = \sqrt{\frac{4GM_1}{c^2}} \sqrt{\frac{D_{SL}D_{OL}}{D_{SL}+D_{OL}}}$, jedoch wurde hier vorausgesetzt, dass der Abstand zwischen Quelle und Linse ($D_{SL} = a$) viel kleiner ist als der Abstand zwischen Beobachter und Linse (D_{OL}).

Löst man nun die quadratische Linsengleichung für p , ergeben sich zwei Lösungen:

$$p_{1,2} = \frac{r \pm \sqrt{r^2 + 4R_E^2}}{2} \quad (3)$$

Diese zwei Lösungen entsprechen den beiden Bildern, welche beim Gravitationslinseneffekt, also bei einer räumlich auflösbaren Quelle, entstehen. Da jedoch beim Mikrolinseneffekt diese räumliche Trennung nicht möglich ist, beschränkt man sich lediglich auf die positive Wurzel, da der Lichtstrahl der negativen Wurzel sehr stark abgelenkt wird und von der Sternscheibe des Begleiters verdeckt wird bzw. sehr schwach ist. Setzt man nun eine Erhaltung der Oberflächenhelligkeit voraus errechnet sich die Lichtverstärkung wie folgt:

$$A = \frac{2\pi p dp}{2\pi r dr} = \frac{p dp}{r dr} = \frac{1}{4} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{4R_E^2}{r^2}} \right) \left(1 + 1/\sqrt{1 + \frac{4R_E^2}{r^2}} \right) \quad (4)$$

Diese Verstärkung wird nun auf jeden Pixel innerhalb der Primärsternscheibe angewandt welcher sich außerhalb von r_{min} befindet. Lichtstrahlen mit Ursprung innerhalb von r_{min} werden nicht stark genug abgelenkt, um den Begleitstern ungehindert zu passieren und werden somit verdeckt.

$$r_{min} = R_2 \left(1 - X^2 \right) \quad (5)$$

Hier bezeichnet X das Verhältnis von Einsteinradius zu Linsenradius:

$$X = \frac{R_E}{R_2}. \quad (6)$$

Gleichung 4 fällt für große Werte von r sehr schnell auf 1 ab und kann dadurch bei jeder Ermittlung der Pixelhelligkeit des Primärsterns angewandt werden. Läuft r hingegen gegen 0, würde die Funktion unendlich werden. Dies ist jedoch durch die Bedingung von $r \geq r_{min}$ ausgeschlossen.

2.5 Randverdunkelung (Limb Darkening)

Betrachtet man unsere Sonne genauer fällt einem auf, dass die Helligkeit vom Zentrum zum Rand hin kontinuierlich abnimmt (siehe Abbildung 10). Da ein Stern aus heißem Gas besteht, nimmt die Temperatur zu, je weiter man ins Innere vordringt. Blickt man nun direkt auf das Zentrum, liegen dahinter größere und somit heißere Gasmengen als im Randbereich. An dieser Stelle wird das meiste Licht emittiert, wodurch der Mittelpunkt wesentlich heller ist als der Rand. Zudem ist die Weglänge des Sehstrahls zum Rand hin länger als zum Zentrum - man blickt also am Rand nur auf die oberen und kühleren Schichten der Sonne. Diesen Effekt nennt man Randverdunkelung oder *Limb Darkening*.

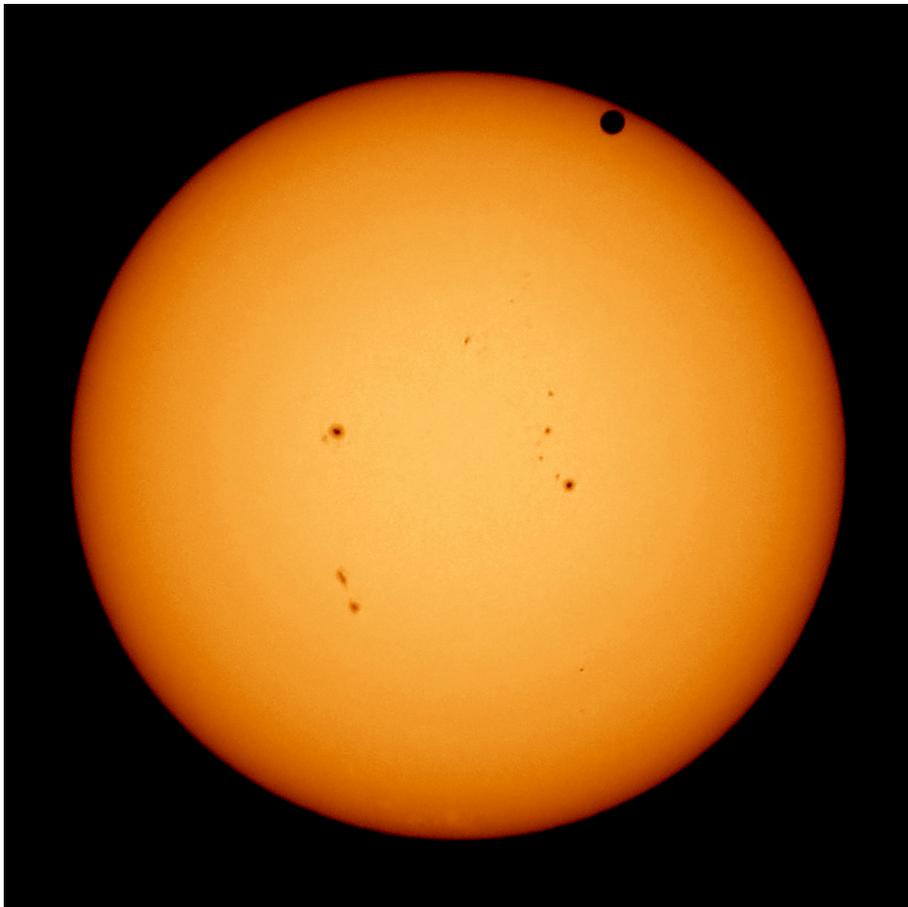


Abbildung 10: Dieses Bild unserer Sonne zeigt wie deren Helligkeit zum Rand hin abnimmt. Der kleine schwarze Fleck oben rechts ist die Venus während eines Transits.

(Quelle: http://en.wikipedia.org/wiki/Limb_darkening)

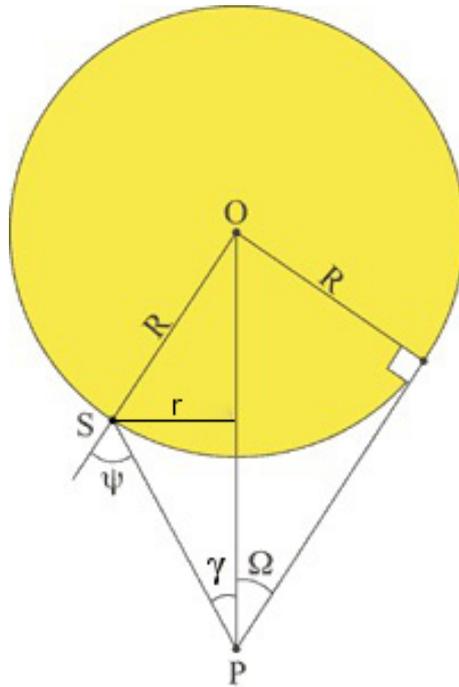


Abbildung 11: Ein Überblick über die Geometrie, welche zur Beschreibung des Randverdunkelungseffektes nötig ist. Die Grafik wurde minimal angepasst (r eingezeichnet, sowie γ gekennzeichnet)

(Quelle: http://en.wikipedia.org/wiki/Limb_darkening)

Um die Helligkeitsverteilung zu beschreiben wird üblicherweise ein lineares Randverdunkelungsgesetz verwendet (die Linearität bezieht sich auf den Faktor $\cos(\gamma)$). Jedoch gilt dieses nur in erster Näherung, weshalb es für heißere Sterne wegen der Wellenlängenabhängigkeit keine exakten Resultate mehr liefert. Unsere Sonne bietet hier die einzige Möglichkeit einer experimentellen Prüfung dieser Modelle, jedoch liefert das lineare Gesetz hier sehr gute Werte. Zur exakteren Beschreibung werden z.B. auch quadratische Gesetze verwendet, jedoch beschränkt sich diese Arbeit auf ein lineares Randverdunkelungsgesetz, um die Helligkeitsverteilung zu parametrisieren. Die Intensität im Abstand r zum Sternzentrum errechnet sich somit wie folgt (vgl. Abbildung 11):

$$I(r) = I_0 \cdot (1 - e + e \cdot \cos(\gamma)) = I_0 \cdot \left(1 - e + e \cdot \sqrt{1 - \frac{r^2}{R_1^2}} \right) \quad (7)$$

Hier gibt der Randverdunkelungskoeffizient e an, wie stark die Intensität am Rand der Sternscheibe abnimmt. Da hier nun an jedem Punkt der Sternscheibe eine andere Intensität abgegeben wird, muss man über die gesamte Scheibe integrieren um die Gesamthelligkeit⁸ wie folgt zu errechnen.

⁸Siehe [7] Seite 231.

$$\begin{aligned} I_{ges} &= \int_A I(r) dA = \int_0^{2\pi} \int_0^{R_1} I(r) r dr d\phi = 2\pi I_0 \int_0^{R_1} (1 - e + e \cdot \cos\gamma) r dr \\ &= 2\pi I_0 (1 - e) \frac{R_1^2}{2} + 2\pi I_0 e \int_0^{R_1} \cos(\gamma) r dr \end{aligned}$$

Weil $r = R_2 \sin(\gamma)$ folgt :

$$I_{ges} = \pi R_1^2 I_0 \left[1 - \left(\frac{e}{3} \right) \right] \quad (8)$$

2.6 Lichtkurven

Es gibt aktuell mehrere Teleskope welche exklusiv nach Transits Ausschau halten. Die bekanntesten Vertreter sind die Weltraumteleskope Kepler und COROT. Um die so gewonnenen Daten interpretieren und analysieren zu können, ist es wichtig zu verstehen, welche Informationen diese enthalten. Bei der Betrachtung von photometrischen Doppelsternen findet man eine periodische Änderung der detektierten Gesamthelligkeit des Systems. Aus solchen Lichtkurven lassen sich viele Daten über das beobachtete System gewinnen. Kennt man die Spektralklasse des Primärsterns kann dadurch auf dessen Radius geschlossen werden. Nun lässt sich über den zeitlichen Verlauf der Bedeckung auf den Radius des Begleiters schließen, sofern die Umlaufgeschwindigkeit bekannt ist (siehe Abbildung 12). Die Helligkeit bei vollständiger Sekundärbedeckung entspricht der Helligkeit des Primärsterns (Abbildung 13). Über den Verlauf der vollständigen Primärbedeckungsphase kann man Rückschlüsse auf die Helligkeitsverteilung der Primärsternscheibe ziehen (siehe Kapitel 2.5).

Dies alles setzt natürlich voraus, dass genügend Datenpunkte zur Verfügung stehen. Gerade hier ist es wichtig, aussagekräftige Modelle zu besitzen, um an die vorhandenen Daten eine Modellkurve anlegen zu können.

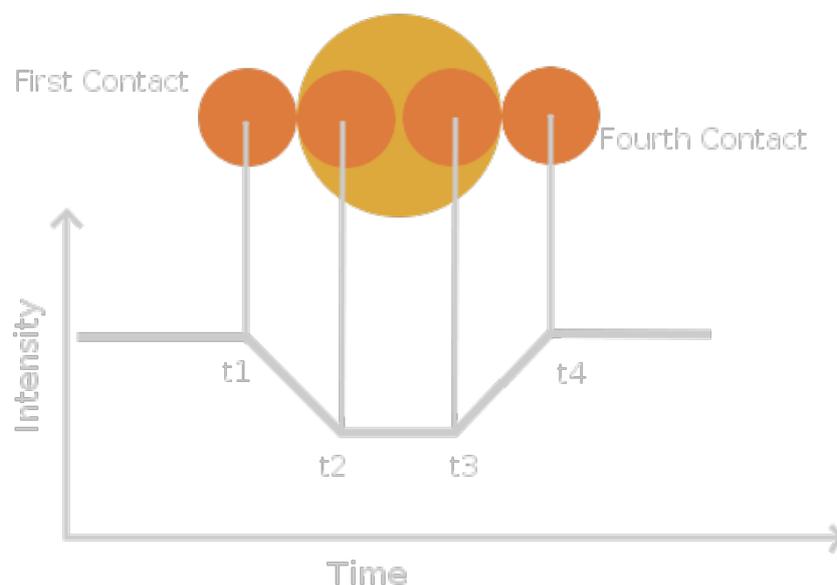


Abbildung 12: Anhand der benötigten Zeit bis zur vollständigen Bedeckung lässt sich der Radius des Begleiters bestimmen.

(Quelle: <https://www.cfa.harvard.edu/~tlaskar/images/lightcurve.png>)

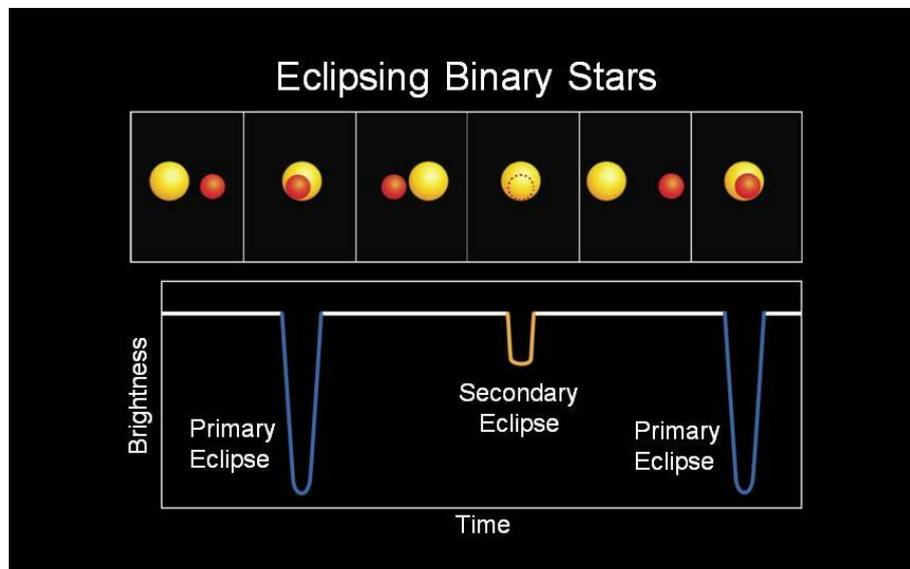


Abbildung 13: Die Lichtkurve eines Transits. Die Tiefe der Primär- sowie Sekundärbedeckung gibt Aufschluss über die Leuchtkräfte der beiden Sterne.
(Quelle: http://en.wikipedia.org/wiki/Variable_star)

3 Simulation von Lichtkurven

Um den Anforderungen dieser Arbeit gerecht zu werden, wurde ein Programm entwickelt, welches sich an [1] orientiert, also eine Simulation des Mikrolinseneffektes bietet. Darüber hinaus wurde es zusätzlich um eine Simulation des Randverdunkelungseffektes ergänzt.

3.1 Funktionsweise des Programms LiMo

Um Lichtkurven für verschiedenste Parameter zu simulieren, wurde das Programm **LiMo** (Akr. *Lightcurve-Modeller*) entwickelt, welches wie sein Name schon sagt, Lichtkurven modelliert. Hierzu legt es ein Raster um das Sternsystem und wertet es Punkt für Punkt aus. Die errechneten Leuchtkräfte bzw. Intensitäten werden aufsummiert. Zu Beginn wurde eine einfache Version entwickelt, die lediglich die Anzahl der „Pixel“⁹ innerhalb des Primärsterns bzw. Begleitsterns zählt. Bei Beginn der Bedeckung werden dann einfach die bedeckten Pixel von der Gesamthelligkeit abgezogen. Durch diese relativ einfache Variante lassen sich, je nach Feinheit der Rasterung, genaue Lichtkurven errechnen. Aufgrund der Gleichberechtigung aller Pixel ist eine Ergänzung um Randverdunkelung hier nicht möglich. Die errechneten Lichtkurven dienen lediglich als Vergleichskurven und finden hier keine weitere Beachtung.

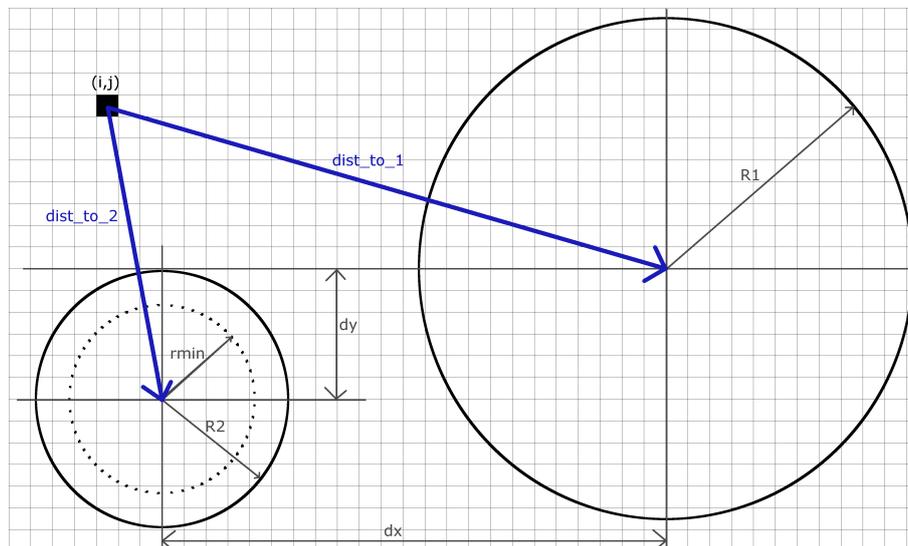


Abbildung 14: Anhand dieser Skizze lässt sich das Funktionsprinzip von LiMo nachvollziehen.

⁹Die Bezeichnung Pixel (Abk. v. Picture Element) ist nicht ganz richtig und dient nur zur verständlichen Erklärung der Arbeitsweise.

Um die Simulation des Mikrolinseneffektes zu ermöglichen musste ein neuer Algorithmus gefunden werden, der jeden Pixel individuell behandelt. Hierzu wurde das vorhandene Programm ergänzt. Es wird nun ein dynamisches Raster über beide Sternscheiben gelegt und jedes einzelne Pixel ausgewertet. Für jedes Element des zweidimensionalen Rasters (i,j) wird der Abstand zum Mittelpunkt der beiden Sterne errechnet. Da sich der Primärstern im Ursprung befindet kann für jede Koordinate (i,j) der Abstand wie folgt errechnet werden:

$$dist_to_1 = \sqrt{i^2 + j^2} \quad (9)$$

Der Abstand zum Begleitstern gestaltet sich minimal komplizierter. Hier muss der jeweilige Abstand in x und y Richtung berücksichtigt werden:

$$dist_to_2 = \sqrt{(dx - j)^2 + (dy - i)^2} \quad (10)$$

Sind beide Abstände errechnet, kann geprüft werden ob das jeweilige Pixel sich innerhalb des Radius von R_1 befindet. Ist dies der Fall, muss noch geprüft werden, ob das Pixel ausserhalb von r_{min} liegt. Ist dies wahr, wird die Intensität des Pixels mit Gleichung 7 bestimmt und mit der Verstärkungsfunktion (Gleichung 4) multipliziert. Da die Verstärkungsfunktion, wie bereits in Abschnitt 2.4 erwähnt, sehr schnell gegen den Wert 1 konvergiert, kann hier jeder Pixel der Primärsternscheibe verstärkt werden. Es werden nur Pixel in der Nähe des Begleitsterns durch dessen Linsenwirkung merklich verstärkt.

Liegt nun zusätzlich eine Bedeckung durch den Begleitstern vor und befindet sich das Pixel ausserhalb von r_{min} , wird die Intensität des Begleitstern-Pixels bestimmt und die Helligkeit des dahinter liegenden Primärstern-Pixels mitsamt des Verstärkungsfaktors addiert.

Im dritten Fall befindet sich das Pixel innerhalb von r_{min} und wird somit nicht stark genug abgelenkt, um zum Beobachter zu gelangen. Zur Gesamthelligkeit wird hier lediglich die Intensität der Begleitsternscheibe addiert.

Ist das Pixel komplett ausserhalb beider Sternscheiben trägt es sinnvollerweise nicht zur Gesamthelligkeit bei.

Dieses Verfahren wird nun für jeden Mittelpunktsabstand dx angewandt und ergibt nach der Berechnung zu jedem dx eine Intensität I_{ges} . Die errechneten Werte werden in einer Datei abgespeichert und können dann ausgegeben werden. Dazu wird das Programm gnuplot verwendet. In Abbildung 14 ist das Funktionsprinzip von LiMo skizziert. Die relevanten Programmparameter sind in Tabelle 1 aufgeführt.

Um die Rechenzeit möglichst gering zu halten müssen die Parameter für die dx -Schritte, sowie für die Aufteilung des Gitters, sinnvoll gewählt werden. Probleme können auftreten, wenn der Primärstern deutlich größer ist als der Beglei-

ter. Denn, um den Begleiter noch in genügend viele Pixel zu unterteilen, muss dementsprechend auch der Primärstern feiner gerastert werden. Dies führt unweigerlich zu einem enormen Anstieg der benötigten Berechnungen. Wählt man die Rasterung zu grob, führt es dazu, dass die errechneten Datenpunkte teils stark streuen (siehe Anhang A). Hierfür wurde eine zusätzliche Abfrage integriert, die prüft, ob der Begleiter aus mindestens 1000 Pixeln besteht.

Zudem ist die Wahl eines kartesischen Koordinatensystems für Sternscheiben nicht optimal. Durch Rundungen kann es dazu kommen, dass bei verschiedenen dx -Abständen unterschiedlich viele Pixel eine Bedingung erfüllen. Das kann auch zu Ungenauigkeiten in den errechneten Daten führen. Um dies zu vermeiden ist es abermals sehr wichtig, ein ausreichend feines Raster zu wählen.

Tabelle 1: Inputparameter von LiMo

Parameter	Bedeutung
R1	Radius des Primärsterns
R2	Radius des Begleitsterns
I1	Intensität des Primärsterns
I2	Intensität des Begleitsterns
RE	Einsteinradius des Begleitsterns
inc	Inklination
a	Orbitalabstand
e1	Randverdunkelungsparameter des Primärsterns
e2	Randverdunkelungsparameter des Begleitsterns
step	Gitterparameter
stepx	Schrittweite/Anzahl der Datenpunkte

3.2 Test auf Funktionalität

Um die Funktionalität des Simulationsprogrammes zu testen, wurden zu Beginn ein paar einfache Parameter eingegeben. Diese Parameter werden in dieser Form weiterverwendet, da eine Änderung der Radienverhältnisse lediglich die Tiefe der Bedeckung, sowie die Bedeckungsdauer beeinflussen würde. Die Werte für die Radien werden immer als Verhältnis zum Orbitalabstand a angegeben. Die Intensitäten sind in Sonnenleuchtkräften angegeben.

$$\frac{R_1}{a} = 0.05, \frac{R_2}{a} = 0.01, I_1 = 1, I_2 = 0, X = 0, inc = 90^\circ$$

Hier erwartet man eine konstante Intensität von 1, bis der Mittelpunktsabstand $dx = -6$ ist, da sich ab diesem Zeitpunkt die beiden Sternscheiben berühren. Ab diesem Zeitpunkt sollte die simulierte Helligkeit steil abnehmen, bis $dx = -4$ ist. Von nun an herrscht eine vollständige Bedeckung und die Intensität muss konstant auf dem Minimalwert bleiben, bis aufgrund der Symmetrie bei $dx=4$ das Ende der Bedeckung beginnt, welches dann bei $dx = 6$ vollständig beendet ist. Betrachtet man Abbildung 15 erkennen man, dass genau dies passiert. Die Simulation ohne Mikrolinsen- und Randverdunkelungseffekte funktioniert.

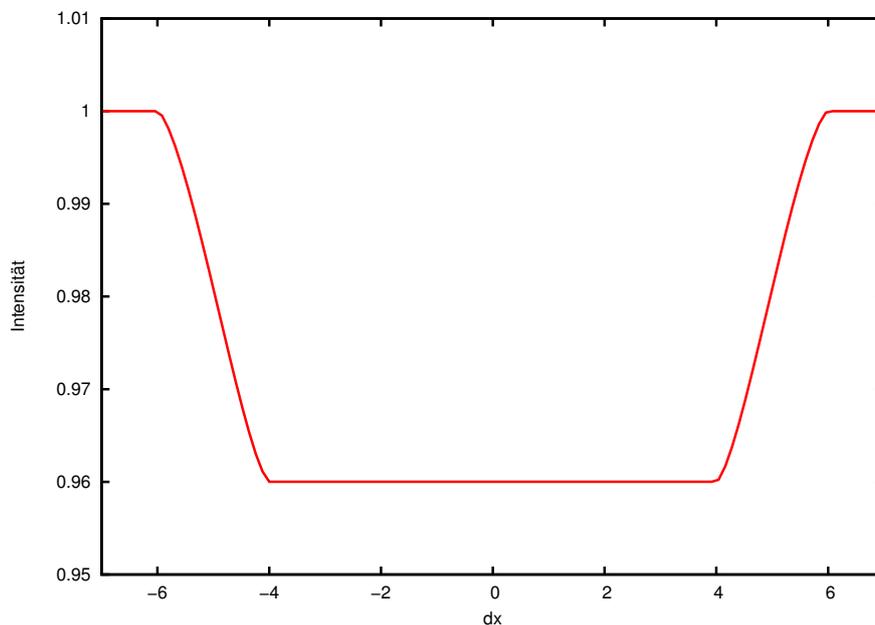


Abbildung 15: Die Testkurve verhält sich exakt wie erwartet.

Ändert man den Parameter *inc* von 90° auf z.B. 87° liegt kein zentraler Transit mehr vor und die Bedeckung beginnt zu einem späteren Zeitpunkt. In Abbildung 16 wurden Kurven mit verschiedenen Bahnneigungen aufgetragen. LiMo prüft vor der Berechnung der Datenpunkte ab, ob der Begleitstern auch tatsächlich eine Bedeckung verursacht, um unnötigen Rechenaufwand zu vermeiden.

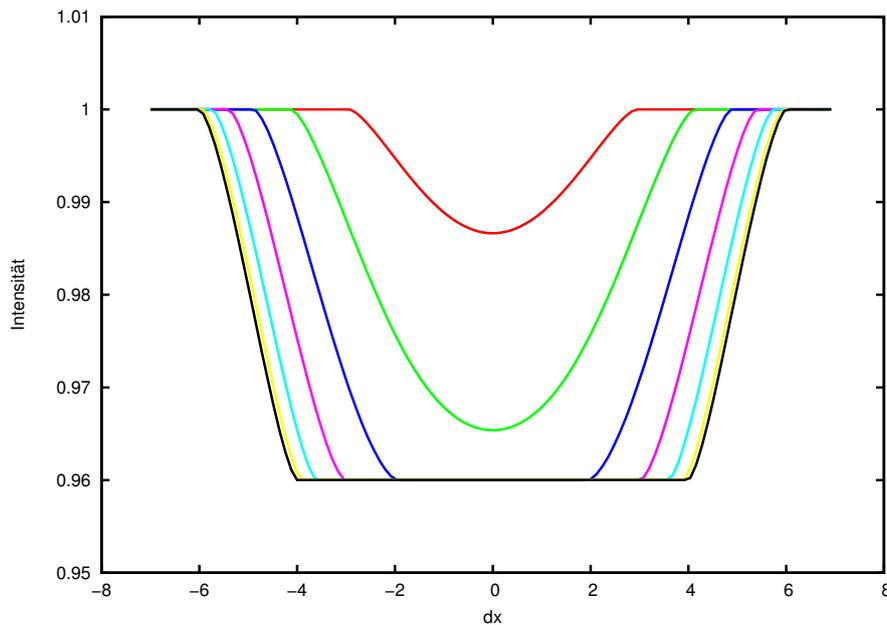


Abbildung 16: Diese Lichtkurven zeigen den Unterschied zwischen einem zentralen Transit (untere Linie), und einem Transit unter einer Inklination von 87° (obere Kurve) in 0.5° Schritten.

Ändert man jetzt, bei ansonsten gleichen Parametern, das Radienverhältnis X auf 0.5, verändert sich der Kurvenverlauf im Bereich der beginnenden Bedeckung, da X die Stärke des Mikrolinseneffektes steuert. Dort sollte nun vor dem Abfall der Intensität eine minimale Verstärkung des Hintergrundlichtes auftreten. Zudem darf die Intensität bei maximaler Bedeckung nicht gleich der ohne Mikrolinseneffekt sein, da durch die Verstärkung scheinbar mehr Licht beim Beobachter ankommt. Genau dies kann man in Abbildung 17 erkennen.

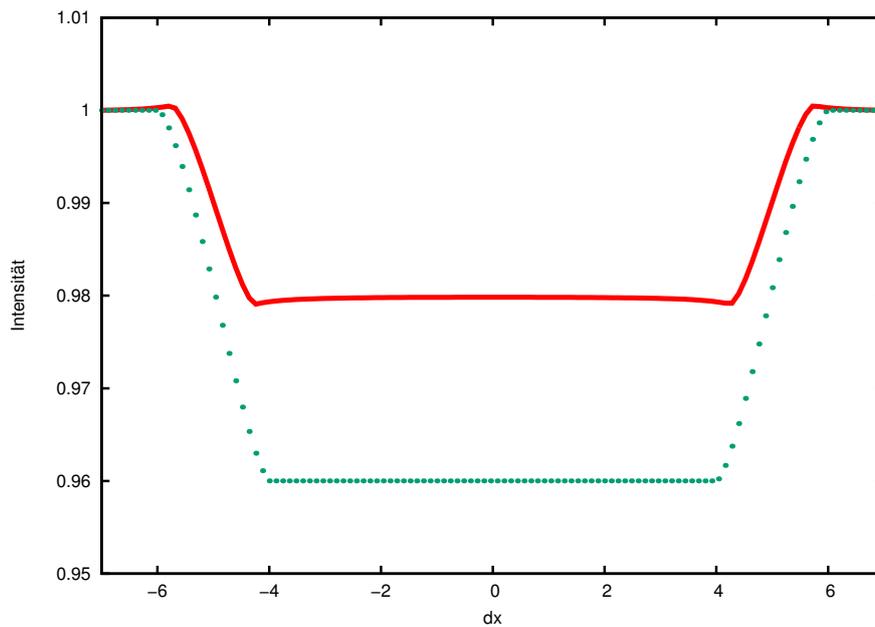


Abbildung 17: Die Testkurve verhält sich exakt wie erwartet. Durch den Mikrolinseneffekt ändert sich nicht nur der Verlauf der beginnenden Bedeckung sondern auch deren Tiefe. Im Vergleich zur normalen Bedeckung (gepunktete Linie) verstärkt der Mikrolinseneffekt die Intensität um ca. 2%.

Bei einer bestimmten Kombination von Parametern kann es dazu kommen, dass eigentlich durch die Bedeckung blockiertes Licht durch die Linsenwirkung trotzdem beim Beobachter ankommt. Es wird also die Bedeckung durch den Mikrolinseneffekt genau ausgeglichen (Siehe Abbildung 18). Dies ist der Fall, wenn $X = 0.7 \approx 1/\sqrt{2}$ beträgt. Hier ergibt sich ein Problem für die tatsächliche Beobachtung solcher Systeme. Wenn hier die Datennahme so getimed ist, dass gerade bei den kurzen Mikrolinsen-peaks nicht gemessen wird, ergibt sich für den Beobachter unter Umständen eine konstant verlaufende Lichtkurve.

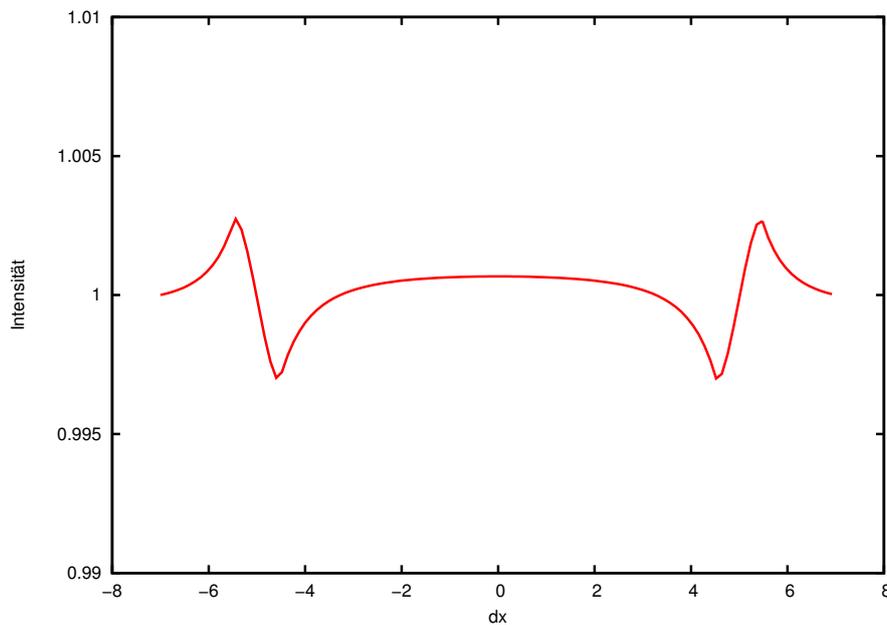


Abbildung 18: Hier wird die Bedeckung exakt durch die Lichtverstärkung des Mikrolinseneffektes ausgeglichen. $R_E/R_2 = X = 0.7$

Bei X Werten größer als 0.7 zeigt sich die interessanteste Konsequenz des Mikrolinseneffektes: ein **Emissionstransit**. Dieser kehrt den Verlauf der Lichtkurve derart um, dass nun keine Verringerung der Intensität zu verzeichnen ist, sondern eine Erhöhung. In Abbildung 19 sind zwei Beispiele aufgeführt.

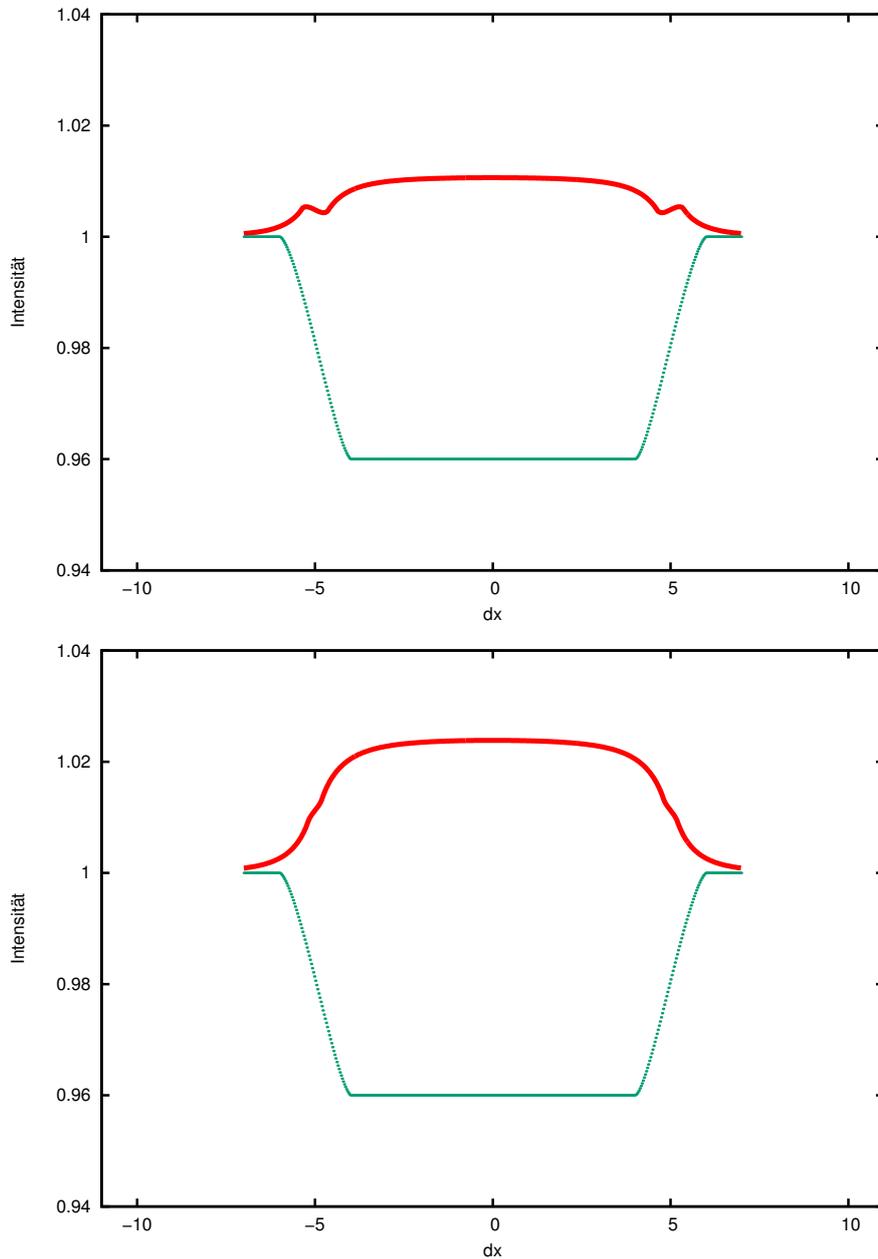


Abbildung 19: Für Werte $X > 0.7$ ergeben sich Transits, deren Intensität während der Bedeckung ansteigt. Links beträgt $X = 0.8$, rechts 0.9. Zum Vergleich ist auch der reguläre Transit eingezeichnet (gepunktete Linie)

3.3 Marsh Kurven

Abbildung 20 zeigt die berechneten Kurven aus [1] mit verschiedenen Werten für X . Bis auf einen minimalen Unterschied in der Intensität sind die Kurven identisch. Dieser Unterschied kommt vermutlich durch geringfügig unterschiedliche Parameter der Gesamtintensitäten beider Sterne. Marsh gibt in seinem paper keine Intensitäten der beiden Sterne an. Die Parameter für die Simulation sind folgende:

$$\frac{R_1}{a} = 0.05, \frac{R_2}{a} = 0.01, I_1 = 1, I_2 = 0, X = 0.0 - 0.9, inc = 90^\circ$$

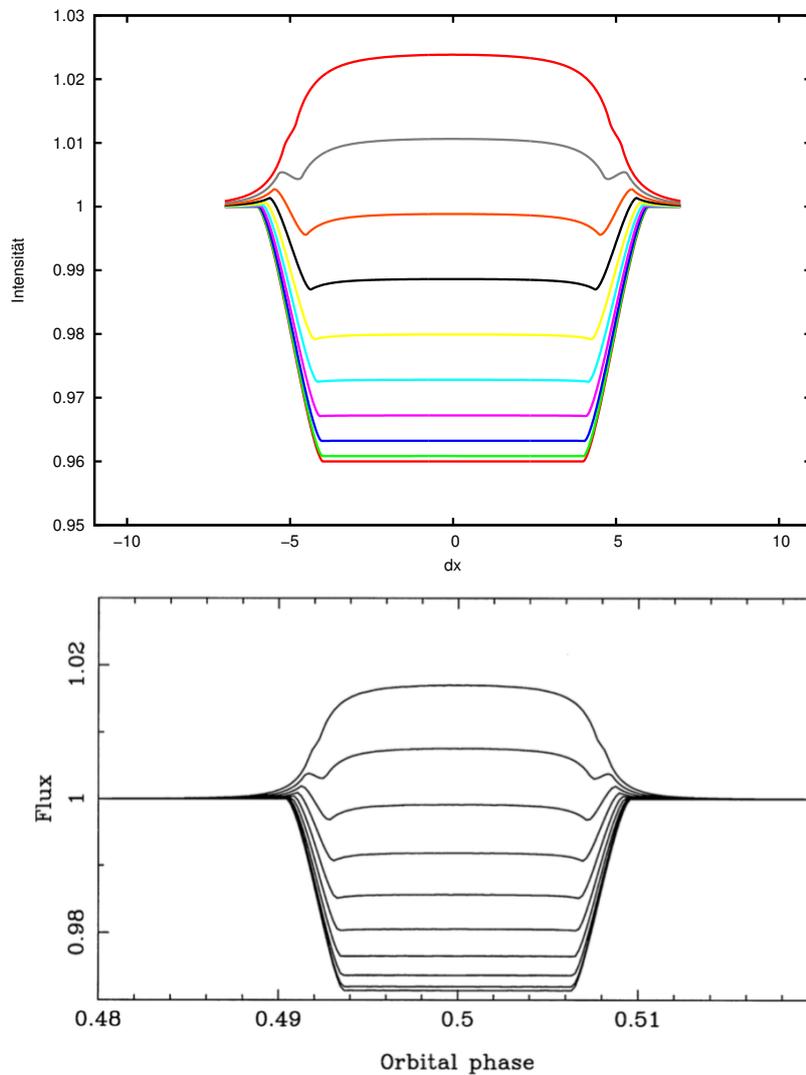


Abbildung 20: Der direkte Vergleich der LiMo-Kurven (oben) und der Kurven aus [1] (unten) zeigt einen qualitativ gleichen Verlauf. In beiden Abbildungen variiert X von 0.0 (untere Kurve) bis 0.9 (obere Kurve) in 0.1er Schritten. Interessant ist die dritte Kurve von oben: Hier wird durch den Mikrolinseneffekt die Bedeckung fast komplett kompensiert.

Abbildung 21 zeigt Lichtkurven, welche unter einer Inklination von 87° errechnet wurden.

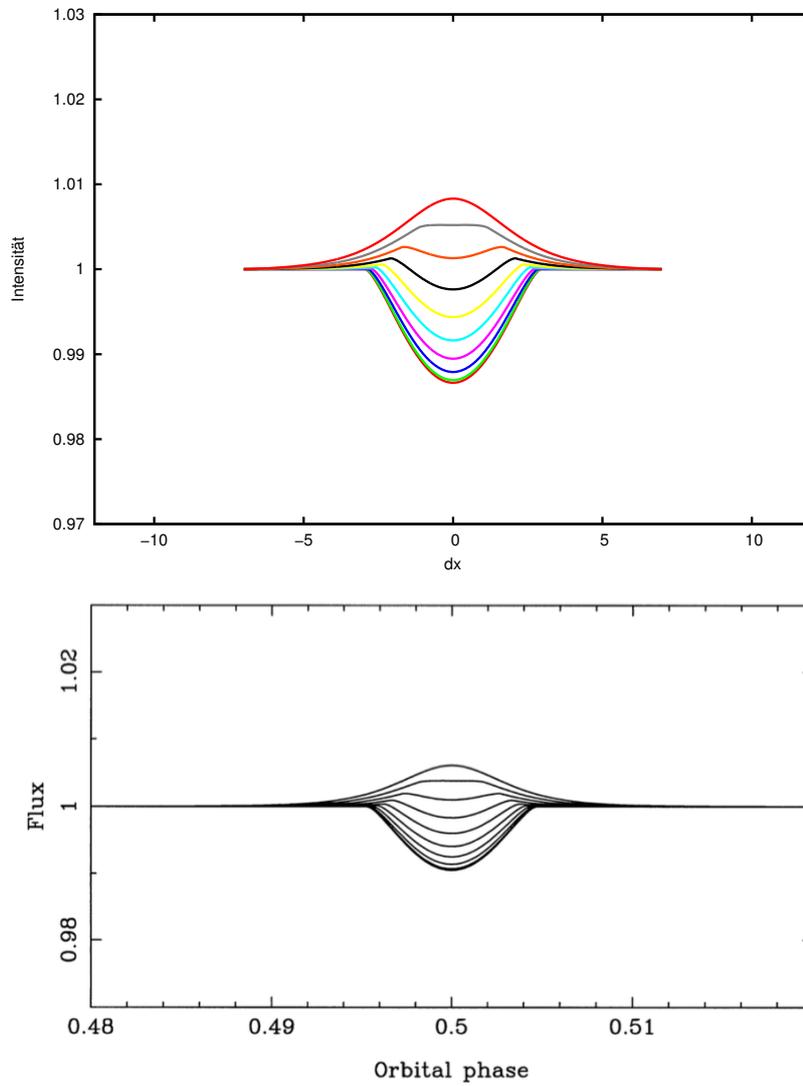


Abbildung 21: Auch bei einer Inklination von 87° sind die LiMo Kurven identisch mit den Marsh-Kurven.

In Abbildung 22 kann man anhand der untersten Kurve nochmals die Programmfunktion anhand eines Extrembeispiels verifizieren. Hier wurden Kurven mit folgenden Parametern berechnet:

$$\frac{R_1}{a} = 0.01 = \frac{R_2}{a}, I_1 = 0.5, I_2 = 0.5, X = 0.0 - 0.9, inc = 90^\circ$$

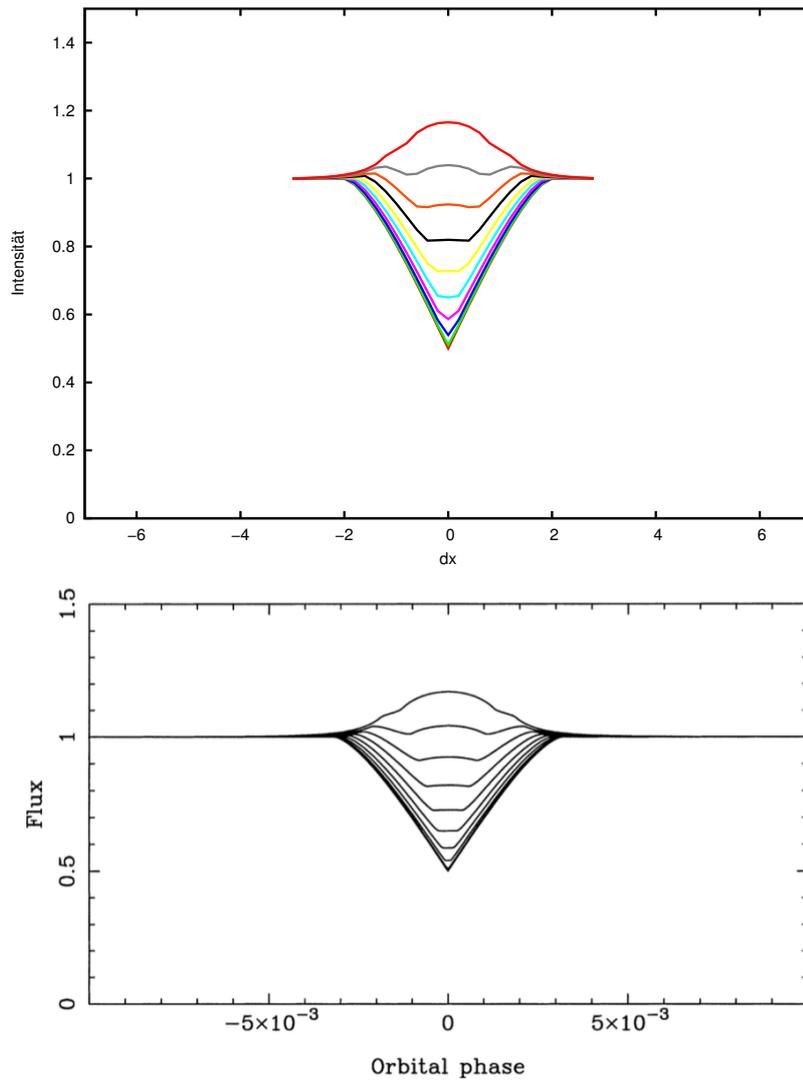


Abbildung 22: Die untere Kurve eignet sich sehr gut, um die Funktion von LiMo zu verifizieren.

Betrachtet man die unterste der Kurven ($X = 0.0$) sieht man wie die Intensität bei Beginn der Bedeckung nahezu linear auf 0.5 abfällt. Dies entspricht der Leuchtkraft des Begleitsterns und ist somit exakt das was zu erwarten war. Zudem belegt es auch, dass LiMo korrekt funktioniert und die Abweichungen der Intensität in Abbildung 20 tatsächlich lediglich durch die Unkenntnis der Parameter I_1 sowie I_2 verursacht werden.

Vergrößert man nun schrittweise den Parameter X , ergibt sich keine vollständige Bedeckung mehr, da durch den Mikrolinseneffekt zuvor nicht sichtbares Licht um den Begleitstern herumgeleitet wird. Dies führt dazu, dass trotz Bedeckung ein Ansteigen der detektierten Intensität zu verzeichnen ist (Emissionstransit).

3.4 Erweiterung um den Randverdunkelungseffekt

In [1] wurde der Randverdunkelungseffekt nicht berücksichtigt, weshalb das folgende Kapitel Neuland betritt. Die Auswirkungen des Mikrolinseneffektes in Kombination mit dem Randverdunkelungseffekt werden anhand der folgenden Lichtkurven diskutiert.

Bedingt durch die Tatsache, dass LiMo jedes Pixel individuell behandelt, stellt die Erweiterung zur Berücksichtigung der Randverdunkelung kein großes Problem dar. Hierzu wurde bei der Errechnung der jeweiligen Pixelintensitäten ein Zusatzparameter integriert, um eine Variation der Intensitäten zu simulieren.

Zu erwarten ist hier, dass bei einer vollständigen Bedeckung kein konstanter Verlauf mehr erkennbar ist, da der abgedeckte Ausschnitt der Sternscheibe je nach Position eine andere Strahlungsintensität aufweist. Zudem sollte sich die Steilheit der abfallenden Flanke leicht ändern. Um dies zu verifizieren wurden wieder die Parameter des vorigen Testlaufes verwendet, diesmal jedoch mit aktiviertem Randverdunkelungseffekt:

$$\frac{R_1}{a} = 0.05, \frac{R_2}{a} = 0.01, I_1 = 1, I_2 = 0, X = 0, inc = 90^\circ, e = 0.4$$

Das erwartete Ergebnis sieht man in Abbildung 23. Im direkten Vergleich mit der Kurve ohne Randverdunkelung erkennt man gut das erwartete Verhalten.

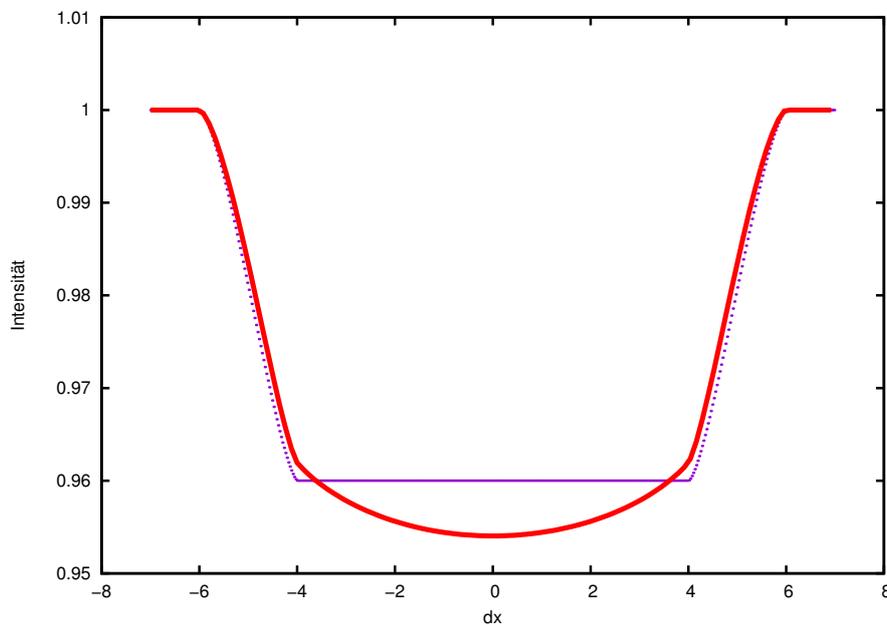


Abbildung 23: An diesen beiden Lichtkurven sieht man die Auswirkungen des Randverdunkelungskoeffizienten. Der Helligkeitsverlauf bei vollständiger Bedeckung ist nun nicht mehr konstant.

In Abbildung 24 kann man die Auswirkung von verschiedenen Randverdunkelungskoeffizienten betrachten. Aus Gleichung 7 ergibt sich für $e = 0$ eine gleichmäßige Helligkeitsverteilung, was einer Lichtkurve ohne Randverdunkelung entspricht. Setzt man für e Werte größer 0 ein, fällt die Helligkeit zum Rand hin linear ab. Für $e = 1$ ergibt sich der Grenzfall, dass die Helligkeit am Sternrand auf 0 abfällt. Da für $e > 0$ bei Beginn der Bedeckung zuerst dunklere Bereiche bedeckt werden, ändert sich auch die Steilheit der Flanke, wodurch diese immer flacher verläuft. Im Extremfall, also bei $e = 1$, ist die Intensität am Rand 0, was zu einer später einsetzenden Bedeckung führt. Bei vollständiger Bedeckung ist der Verlauf der Kurve auch nicht mehr konstant, sondern verläuft immer mehr parabelförmig.

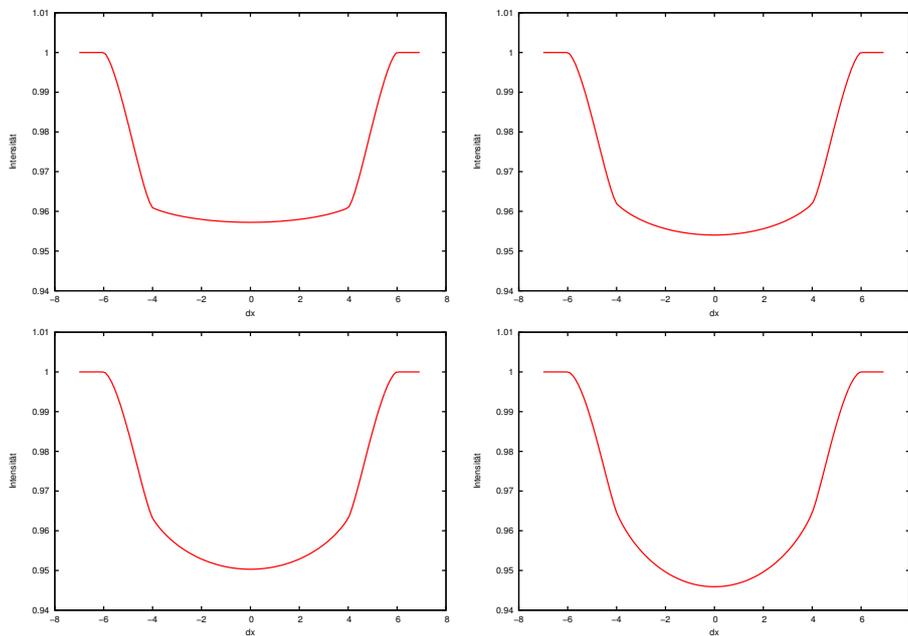


Abbildung 24: Verschiedene Werte für den Randverdunkelungskoeffizienten e im direkten Vergleich. Oben links beginnend $e = 0.2, 0.4, 0.6, 0.8$.

Betrachtet man die Kombination von Mikrolinseneffekt und Randverdunkelungseffekt, ergeben sich interessante Kurvenverläufe. Bis zu einem Wert für $X \leq 0.7$ verringert die Randverdunkelung die Intensität bei vollständiger Bedeckung, sie kompensiert also die Auswirkungen des Mikrolinseneffektes. Die Stärke dieses Effektes hängt von dem Randverdunkelungsparameter e ab (vgl. Abbildung 25). Für $X = 0.3$ und $e \geq 0.7$ ist die totale Bedeckung sogar geringer als der normale Transit ohne jegliche Effekte. Hier besteht Verwechslungsgefahr mit anderen Kurven bzw. Parametern, da sie leicht mit einem nicht zentralen Transit verwechselt werden könnten (vgl. Abbildung 16 zweite Kurve von oben).

Der interessanteste Fall tritt hier auch wieder bei einem X Wert von 0.7 auf. In Abbildung 25 (mitte, rechts) verläuft die totale Bedeckung immer flacher, je größer der Wert für e ist. Bei einem (eher unrealistischen) Wert von $e = 0.9$ sieht der Kurvenverlauf, bei Vernachlässigung des Mikrolinsen-peaks zu Beginn der Bedeckung, aus wie ein Transit ohne zusätzliche Effekte. Jedoch ist die Auswirkung hier sehr gering und würde bei einer realen Beobachtung wohl im Rauschen verloren gehen.

3 Simulation von Lichtkurven

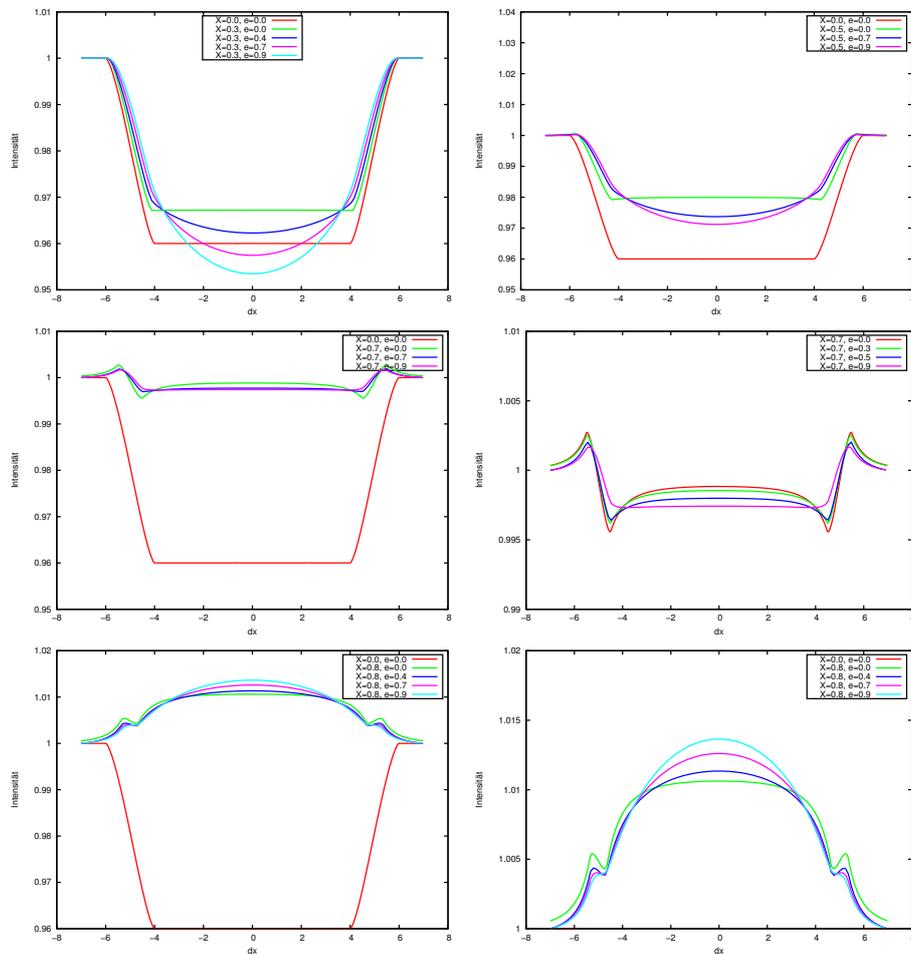


Abbildung 25: Eine Kombination aus Mikrolinseneffekt sowie Randverdunkelungseffekt. Bis zu dem Grenzwert bei $X=0.7$ verringert die Randverdunkelung die Bedeckungsintensität, für Werte darüber erhöht sie sich.

3.5 Diskussion

Anhand der simulierten Transitkurven lässt sich nun zusammenfassend sagen, dass die Einflußgrößen des Mikrolinseneffektes sowie der Randverdunkelung merkliche Änderungen der Kurvenverläufe verursachen. Die Transittiefe kann bei geeigneten Parametern von einer Bedeckungskurve zu einer Emissionskurve werden. Ohne Mikrolinseneffekt ergibt sich in den obigen Beispielen eine Abschwächung der Intensität um ca. 4%. Erhöht man den Parameter X , welcher die Stärke des Mikrolinseneffektes bestimmt, kann aus diesen 4% Abschwächung eine Verstärkung um ca. 2.5% werden. Solche als „self-lensing“ bezeichneten Effekte wurden sogar bereits beobachtet. In [10] wird ein Binärsystem mit einem G-Stern und einem weißen Zwerg beschrieben, von dem regelmäßige Pulse mit einer Lichtverstärkung von 0.1% gemessen wurden. Dieses Verhalten kann nach heutigem Kenntnisstand nur durch den Mikrolinseneffekt hinreichend erklärt werden.

Durch den Randverdunkelungseffekt werden die Intensitäten im Vergleich zu einem „nackten“ Transit um bis zu ca. 1% verringert. Die Kombination von beiden Effekten ergibt wiederum Kurvenverläufe, in denen sich beide Effekte teilweise kompensieren können. Dies ist jedoch sehr schwach (ca. 0.2%) und auch nur bei extremen Werten für den Randverdunkelungsparameter e gegeben. Bei realistischen Werten für e ($0.3 < e < 0.7$) hängt die Auswirkung der Randverdunkelung von der Stärke des Mikrolinseneffektes, also von dem Wert des Parameters X , ab. Dies führt für X -Werte < 0.7 zu einer Abschwächung der Intensität um bis zu ca. 1%, und für X -Werte > 0.7 zu einer Verstärkung um ca. 0.3%.

Da der Orbitalabstand a in den Einsteinradius R_E einfließt und somit über den Parameter X die Stärke des Mikrolinseneffektes bestimmt, sind solche Ereignisse relativ selten. Um einen starken Effekt zu erzielen muss a möglichst groß sein, was zur Folge hat, dass solche Systeme nur noch eine sehr geringe Inklination aufweisen dürfen. Andernfalls ist aus unserer Perspektive kein Transit mehr beobachtbar. Dies erschwert zwar die Suche nach solchen Systemen, schließt es jedoch nicht von vornherein aus.

A Limits von LiMo

Wählt man falsche Parameter kann es zu unerwartetem Verhalten der Simulation kommen. Die Anzahl der Pixel pro Sternscheibe ist entscheidend für die Genauigkeit. Betrachtet man die Kurven in Abbildung 26 erkennt man wie stark die Datenpunkte streuen, sobald man die Pixelanzahl verringert. Um solch ein unerwünschtes Verhalten zu unterbinden, ist eine Sicherheitsabfrage implementiert, welche das Programm abbricht, sobald der kleinere Stern aus weniger als 1000 Pixeln besteht, da ab dieser Grenze eine zu große Ungenauigkeit bei den Datenpunkten auftritt.

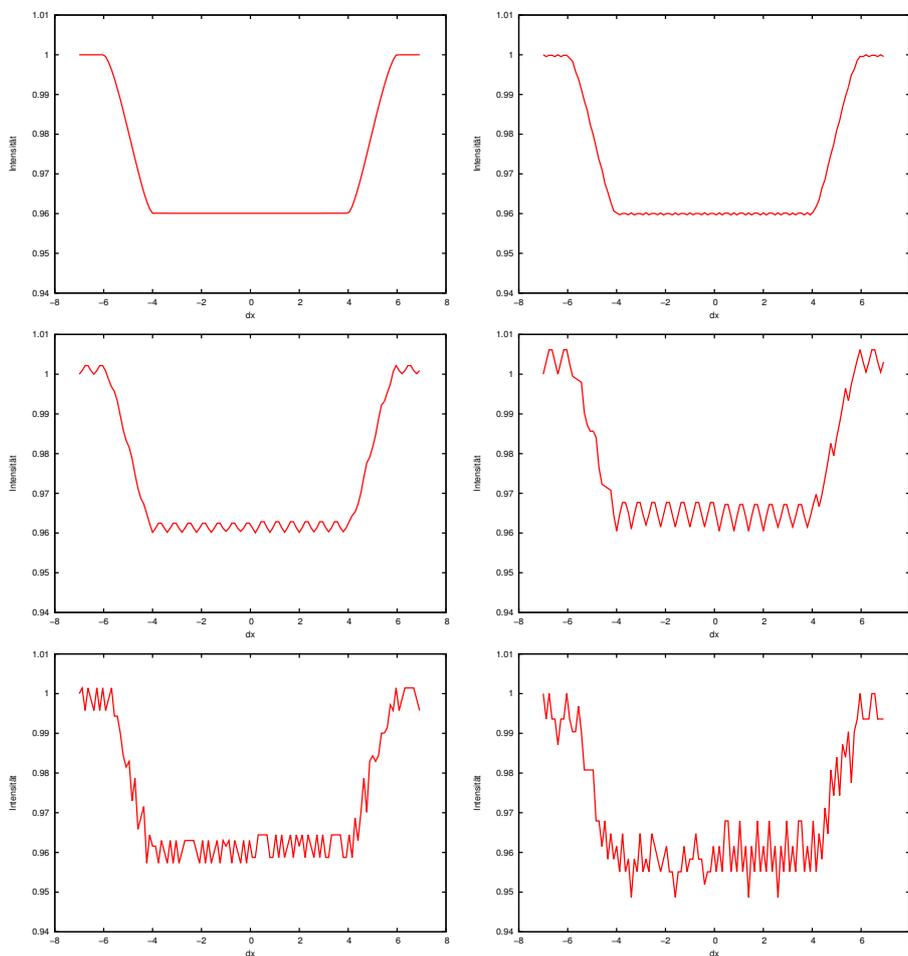


Abbildung 26: Hier wurde die Auflösung des Gitters drastisch verringert. Die errechneten Datenpunkte werden immer ungenauer. Der Begleitstern besteht oben links beginnend aus 7835, 1250, 312, 75, 27 und 12 Pixeln.

B Ausblick

In dieser Arbeit wurde gezeigt, dass eine Modellierung von Lichtkurven mit relativ einfachen Mitteln möglich ist. Das Programm LiMo kann Kurven für verschiedenste Parameter simulieren. Für zukünftige Projekte wäre eine Anbindung an das Programm MORO von Prof. Dr. Horst Drechsel denkbar, um dessen Funktionsumfang bezüglich des Mikrolinseneffektes zu erweitern. Auch eine intelligente Auswertung der einzelnen Pixel könnte die benötigte Rechenzeit drastisch verringern.

C Danksagung

Ich möchte Prof. Dr. Ulrich Heber für dieses spannende Thema sowie für die vielen bereichernden Gespräche danken. Auch Dr. Andreas Irrgang stand mir immer mit Rat und Tat zur Seite. Herzlichen Dank dafür.

Auch meinen Kommilitonen Jan Friedmann und Engelbert Eichner müssen hier erwähnt werden. Gemeinsam mit Ihnen wurden die Hürden der ersten Semester gemeistert und unzählige Übungsblätter gelöst.

Zudem danke ich meiner Familie für jegliche Unterstützung, da ohne Sie dieses Studium nicht möglich gewesen wäre.

Besonderer Dank gilt auch meiner Lebensgefährtin Stine Blinne für das stundenlange Korrekturlesen sowie die Motivation falls mal ein Tiefpunkt erreicht war.

Erklärung

Hiermit versichere ich, dass ich die vorliegende Arbeit selbstständig verfasst und keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel benutzt habe, dass alle Stellen der Arbeit, die wörtlich oder sinngemäß aus anderen Quellen übernommen wurden, als solche kenntlich gemacht sind und dass die Arbeit in gleicher oder ähnlicher Form noch keiner Prüfungsbehörde vorgelegt wurde.

Schwabach, den 31.03.2015

Unterschrift

D Quellcode

```
1 //
2 //  main.cpp
3 //  Lightcurve Modeller - LiMo
4 //
5
6 #include <iostream>
7 #include "math.h"
8 #include "stdlib.h"
9 #include "string.h"
10 #include "stdio.h"
11 #include "fstream"
12 #include <iomanip>
13
14 const double pi=4*atan(1);
15
16 using namespace std;
17
18 // benötigte Startparameter:
19 double R1=1.;
20 double R2=1.;
21 double RE=0.9*R2;
22 double I1=.5;
23 double I2=.5;
24 double inc=90.;
25 double a=R1/0.01;
26
27 //Limb Darkening
28 double e1=0.;
29 double e2=0.;
30
31 //Gitterabstand
32 double step=R2/25.;
33
34 //datapoints
35 double stepx=(2.*R1+2.*R2)/50.;
36
37 double I01=I1/(pi*R1*R1*(1-e1/3.));
38 double I02=I2/(pi*R1*R1*(1-e2/3.));
39 double limb1=0. , limb2=0;
40 double I=0.;
41 double Iges=0.;
42 double amp=0.;
43
44 // Y-Abstand des Begleiters
45 double dx;
```

```
46 const double dy = a*cos(inc*pi/180.);
47 double dist_to_1=0 , dist_to_2=0;
48
49 // Koordinaten des Gitters bzw Anzahl der Pixel je
   Sternscheibe
50 double i,j,n = 0,norm=0;
51 int inr1=0,inre=0,inr2=0,bedeckt=0;
52
53 string filename;
54
55
56 int main() {
57
58     for (RE=0.0*R2; RE<=0.9*R2; RE=RE+0.1*R2) {
59
60         //rmin definiert ausserhalb welches Radius lensing
           stattfindet
61         double rmin=R2*(1-pow(RE/R2, 2));
62
63         /* if (fabs(dy) > R1+R2) {
64             cout << "Es gibt keine Bedeckung! Der Begleiter
               passiert in einem Abstand von " << dy << ". R1+R2
               ist jedoch nur " << R1+R2 << endl;
65             system("say Fehler!");
66             return 0;
67         }*/
68
69         if (RE>=R2) {
70             cout << "In diesem Modell muss RE<=R2 sein!" << endl;
71             system("say Fehler!");
72             return 0;
73         }
74
75         cout << "Parameter: " << endl;
76         cout << "R1: " << R1 << "    R2: " << R2 << "    RE: " <<
           RE << "    I1: " << I1 << "    I2: " << I2 << "    dy:
           " << dy << endl;
77
78         fstream f;
79         filename="lc" + to_string( RE ) + ".dat";
80         f.open(filename, ios::out);
81
82         //Header schreiben:
83         f << "#Simulierte Lichtkurve" << endl << endl;
84         f << "#Verwendete Parameter: " << endl;
85         f << "#Primärradius: " << R1 << endl;
86         f << "#Sekundärradius: " << R2 << endl;
87         f << "#Einsteinradius: " << RE << endl;
```

```

88     f << "#Primär Intensität: " << I1 << endl;
89     f << "#Sekundär Intensität: " << I2 << endl;
90     f << "#Angular separation: " << a << endl;
91     f << "#Inklination: " << inc << endl;
92     f << "#y-offset: " << dy << endl;
93     f << "#Limb-darkening Koeffizient Stern1: " << e1 << endl;
94     f << "#Limb-darkening Koeffizient Stern2: " << e2 << endl
      << endl;
95     f << "#distance,    flux,    inr1,    inre,    inr2,
      bedeckt" << endl;
96
97     cout << "Daten werden berechnet..." << endl;
98     cout << "step_grid: " << step << " step_dx: " << stepx <<
      endl;
99
100    //dx durchlaufen lassen...
101    for (dx=-(R1+2.*R2); dx <= (R1+2.*R2); dx =dx + stepx) {
102
103        for (i=-(R1+R2+fabs(dy)); i<=(R1+R2+fabs(dy)); i=i+
          step) {
104            for (j=-(R1+R2+fabs(dx)); j<=(R1+R2+fabs(dx)); j=j
              +step) {
105
106                //erstmal alles ausrechnen
107
108                //Abstand Pixel-Primärstern
109                dist_to_1=sqrt(pow(i, 2)+pow(j, 2));
110                //Abstand Pixel-Begleiter
111                dist_to_2=sqrt(pow(dx-j, 2) + pow(fabs(dy)
                  -i, 2));
112                //ich bin der i,j-pixel!
113
114                //bin ich innerhalb Stern1?
115                if (dist_to_1<=R1) {
116                    inr1++;
117                    //bin ich auch innerhalb RE von Stern2
                      ?
118                    if (dist_to_2>rmin && dist_to_2>R2) {
119                        inre++;
120                        amp=(1./4.)*(1+sqrt(1+4*pow(RE/
                          dist_to_2, 2) ))*(1+1/( sqrt
                            (1+4*pow(RE/dist_to_2, 2) ) ) )
                          ;
121
122                        limb1=I01*(1-e1+e1*sqrt(1 - pow(
                          dist_to_1/R1, 2)));
123                        I=I + limb1*amp;
124                    }

```

```

125
126 //ich bin innerhalb R2 -> Bedeckung!
127
128 else if (dist_to_2>rmin && dist_to_2<=
      R2) {
129     //Bedeckung + amp
130     amp=(1./4.)*(1+sqrt(1+4*pow(RE/
      dist_to_2, 2) ))*(1+1/( sqrt
      (1+4*pow(RE/dist_to_2, 2) ) ) )
      ;
131     limb1=I01*(1-e1+e1*sqrt(1 - pow(
      dist_to_1/R1, 2)));
132     limb2=I02*(1-e2+e2*sqrt(1 - pow(
      dist_to_2/R2, 2)));
133     I=I + limb1*amp + limb2;
134 }
135 else //if (dist_to_2<rmin)
136     {
137     bedeckt++;
138     //nur I2(r)
139     limb2=I02*(1-e2+e2*sqrt(1 -
      pow(dist_to_2/R2, 2)));
140     I=I+limb2;
141     }
142 }
143 if (dist_to_2<=R2 && dist_to_1>R1) {
144     inr2++;
145     limb2=I02*(1-e2+e2*sqrt(1 - pow(
      dist_to_2/R2, 2)));
146     I=I+limb2;
147 }
148 }
149 }
150 if (n<1) {
151     if (inr2<1000) {
152         system("say Fehler!");
153         cout << "Gitter zu klein! #pixel2= " << inr2
      << " - Abbruch" << endl;
154         return 0;
155     }
156     cout << "#pixel Stern1: " << inr1 << endl << "#
      pixel Stern2: " << inr2 << endl << endl;
157     norm=I/(I1+I2);
158     n++;
159 }
160 //Datenpunkt erstellen
161 Iges=I/norm;
162 cout << "*" << flush;

```

```
163
164     f << setprecision(20) << dx << '\t' << Iges << '\t' << inr1 << '\t' << inre << '\t' << inr2 << '\t' << bedeckt << endl;
165
166     //Zähler nullen.
167     I=0;
168     inr1=0;
169     inre=0;
170     inr2=0;
171     bedeckt=0;
172 }
173
174 f.close();
175     cout << endl << endl;
176     n=0;
177 }
178
179 cout << endl << "fertig!" << endl;
180 return 0;
181 }
```

Abbildungsverzeichnis

1	Doppelstern Sonnenuntergang	2
2	Hertzsprung-Russell-Diagramm	6
3	Evolution eines weißen Zwerges	7
4	Innerer Aufbau eines weißen Zwerges	8
5	Helix Nebel	8
6	Lichtablenkung durch ein massereiches Objekt	9
7	Smiley im Weltall - Einsteinring	10
8	Einstein Notiz Lichtablenkung	11
9	Skizze Lichtablenkung	13
10	Sonne mit Randverdunkelung	15
11	Geometrie der Randverdunkelung	16
12	Lichtkurve mit Zeitabschnitten	18
13	Transit Lichtkurve	19
14	LiMo Funktionsskizze	20
15	Lichtkurventest ohne Mikrolinseneffekt, ohne Randverdunkelung .	23
16	Lichtkurventest ohne Mikrolinseneffekt, ohne Randverdunkelung, inc. variabel	24
17	Lichtkurventest mit Mikrolinseneffekt, ohne Randverdunkelung . .	25
18	Lichtkurventest - Mikrolinseneffekt gleicht Bedeckung aus	26
19	Emissionstransit $X = 0.8, 0.9$	27
20	Vergleichskurven zu Marsh 5:1	28
21	Vergleichskurven zu Marsh 5:1 inc. 87°	29
22	Vergleichskurven zu Marsh 1:1	30
23	Lichtkurventest ohne Mikrolinseneffekt, mit Randverdunkelung . .	32
24	Randverdunkelung mit verschiedenen Parametern	33
25	Randverdunkelung und Mikrolinseneffekt in Kombination	35
26	Auswirkungen zu wenig pixel	37

Literatur

- [1] T. R. Marsh, Gravitational lensing in eclipsing binary stars, MNRAS 324, 547-552 (2001)
- [2] A. Einstein, Über den Einfluß der Schwerkraft auf die Ausbreitung des Lichtes, AdP 35, 898 (1911)
- [3] R. Narayan, M. Bartelmann, Lectures on gravitational Lensing, arXiv:astro-ph/9606001
- [4] U. Heber, H. Drechsel, Physics of Stars WS13/14, Begleitmaterial zur Vorlesung
- [5] M. Donahue, J. Bennett, N. Schneider, M. Voit, Astronomie - Die kosmische Perspektive, Pearson Studium
- [6] H. Karttunen, P. Kröger, H. Oja, M. Poutanen, K. Donner, Fundamental Astronomy, Springer
- [7] R. W. Hilditch, An Introduction to Close Binary Stars, Cambridge University Press
- [8] P. Schneider, Einführung in die Extragalaktische Astronomie und Kosmologie, Springer
- [9] U. Heber, Hot Subdwarf Stars, Annu. Rev. Astron. Astrophys. 2009. 47:211-251
- [10] E. Kruse, E. Agol, KOI-3278: A Self-Lensing Binary Star System, arXiv:1404.4379v1